

VISIT...

LANZAROTE  
*Caliente*.COM

**CONSTANTIN IONESCU**

**STABILITATEA ȘI DINAMICA  
CONSTRUCȚIILOR**

**IAȘI, 2004**

# CUPRINS

**Cursul 1 Stabilitatea și Dinamica Construcțiilor**

**Cursul 2 Sisteme cu un grad de libertate dinamică**

**Cursul 3 Sisteme vibrante cu 1GLD**

**Cursul 4 Sisteme vibrante cu  $n$  GLD**

**Cursul 5 Sisteme vibrante cu  $n$  GLD**

**Cursul 6 Sisteme vibrante cu  $n$  GLD. Vibrații forțate produse de acțiunea unor forțe perturbatoare armonice**

**Cursul 7 Sisteme vibrante cu  $n$  GLD**

**Cursul 8 Calculul de stabilitate. Calculul de ordinul II**

**Cursul 9 Calculul de ordinul II**

**Cursul 10** Calculul deplasărilor și rigidităților de ordinul II

**Cursul 11** Calculul de stabilitate a cadrelor utilizând matricea de flexibilitate

**Cursul 12** Calculul de ordinul II al cadrelor prin metoda forțelor

**Cursul 13** Studiul de stabilitate și calculul de ordinul II al cadrelor cu noduri fixe prin metoda deplasărilor

**Cursul 14** Calculul de ordinul II și de stabilitate. Cadre cu noduri deplasabile

**B. Bibliografie**

# CURSUL 1

## STABILITATEA ȘI DINAMICA CONSTRUCȚIILOR

### 1.1. Generalități

Obiectul de studiu "Stabilitatea și Dinamica Construcțiilor" se predă studenților, care aprofundează profilul construcției, în anul al III-lea, semestrul 6, pe durata a 14 săptămâni.

Disciplina se compune din trei părți distincte:

- a) Dinamica Construcțiilor;
- b) Stabilitatea Construcțiilor și
- c) Calculul de Ordinul II.

**Dinamica construcțiilor** este o știință ce face parte din Mecanica construcțiilor, alături de: Mecanica Teoretică, Rezistența Materialelor, Statica Construcțiilor, Teoria Elasticității etc. Are ca obiect

de studiu echilibrul dinamic al structurilor, exprimat prin metode specifice pentru aflarea stării de efort și deformație, produsă de acțiuni.

Scrierea ecuațiilor de echilibru se face aplicând principiul lucrului mecanic virtual, principiul lui D'Alembert, ecuațiile lui Lagrange de speța a doua sau principiul lui Hamilton.

### **Stabilitatea Construcțiilor și Calculul de Ordinul II.**

Exprimarea echilibrului unei structuri în raport cu poziția sa deformată, face obiectul de studiu al stabilității și calculului de ordinul II.

*Calculul de stabilitate* constă din identificarea naturii echilibrului poziției deformată a unei structuri. Mărimile eforturilor axiale sunt necunoscute.

*Calculul de ordinul II* al unei structuri de rezistență, constă din determinarea stării de tensiune și deformație prin exprimarea echilibrului în raport cu poziția sa deformată. În calculul de ordinul II, sarcinile transversale și eforturile axiale se presupun cunoscute.

## **1.2. Dinamica construcțiilor**

### **1.2.1. Acțiuni. Sistem. Răspuns**

Abordarea sistemică a problemelor din Dinamica Structurilor presupune definirea sistemului vibrant, a acțiunilor și a răspunsului.

*Acțiunea* reprezintă o cauză care produce, în elementele unei structuri de rezistență a unei construcții, eforturi și tensiuni, deplasări și deformații, pulsații etc. Pentru calcul, acțiunea se reprezintă sub formă de forțe și deplasări, caracterizate cantitativ prin parametri corespunzători.

*Acțiunea dinamică* reprezintă o cauză rapid variabilă în timp, ce se manifestă asupra unui sistem dinamic, generând eforturi inerțiale. Exemple de acțiuni dinamice:

- a) acțiuni produse de utilaje și echipamente: mașini unelte, motoare cu mecanism bielă – manivelă, prese și mașini de forat, concasoare și mori (din industria materialelor de construcții);
- b) sarcini mobile: trafic, autovehicule, poduri rulante, vagoane de cale ferată etc.;
- c) acțiunea vântului;
- d) acțiunea seismică;
- e) explozii.

**Sistem. Un** Sistem vibrant este constituit din structura propriu-zisă a unei construcții la care se atașează mase distribuite (după o anumită lege) și/sau mase concentrate.

Orice structură este capabilă, sub acțiunea unor cauze cu caracter dinamic (variabile în timp), să efectueze mișcări relative în jurul unei poziții de echilibru. Acest fenomen se datorează faptului că structura posedă proprietăți inerțiale (mase concentrate și distribuite) și elastice (definite prin flexibilitate sau rigiditate).

Deoarece mișcarea unui asemenea sistem se repetă, în timp, după anumite legi de variație, tipul de comportament al sistemului se numește mișcare vibratorie sau vibrație.

*Răspuns. Răspunsul dinamic liber* caracterizează mișcarea unui sistem vibrant în anumite condiții inițiale (deplasare sau viteză), după ce a încetat cauza care a produs mișcarea.

*Răspunsul dinamic forțat* caracterizează mișcarea unui sistem dinamic pe timpul istoric al aplicării acțiunii dinamice. Răspunsul dinamic se exprimă în mărimi cinematice fundamentale: deplasări, viteze și accelerații sau derivate: energii, forțe generalizate, eforturi, tensiuni și deformații.

Obiectul de studiu al Dinamicii Structurilor îl constituie identificarea relațiilor existente între acțiunile dinamice, parametrii de definire a sistemului vibrant și răspunsul dinamic al acestuia.

### **1.2.2. Aspecte fundamentale în Dinamica Structurilor**

Cele trei probleme fundamentale ale Dinamicii Structurilor sunt următoarele:

- a) Analiza;
- b) Sinteza și
- c) Identificarea.

*Analiza.* Prin analiza unui sistem vibrant se înțelege determinarea caracteristicilor de răspuns ale acestuia când se cunosc: acțiunea și caracteristicile sistemului.

*Sinteza.* Sinteza unui sistem dinamic reprezintă modul cel mai complex de a trata problemele de dinamică. Se pune problema determinării caracteristicilor fizice ale sistemului cunoscând: acțiunea și răspunsul.

*Identificarea excitației.* În cazul în care se cunosc caracteristicile sistemului dinamic și răspunsul acestuia, se poate determina acțiunea aplicată pe sistem. Sistemul joacă rolul unui instrument de măsură.

### **1.2.3. Clasificarea mișcărilor vibratorii**

Mișcărilor vibratorii pot fi clasificate din mai multe puncte de vedere, funcție de cauza care produce vibrația, forțele de rezistență, de excitație etc.

## a) După reprezentarea analitică:

- i. vibrații armonice – mișcări reprezentate prin funcții trigonometrice;
- ii. vibrații periodice – mișcări care se repetă identic după un interval de timp,  $T$ , numit perioadă de vibrație;
- iii. vibrații descrescătoare – amplitudinile mișcării se micșorează în timp;
- iv. vibrații crescătoare – amplitudinile mișcării cresc în timp.

## b) După cauza care produce vibrația:

- i. vibrații libere – produse de un șoc (condiții inițiale: viteză și deplasare). Cauza dispare și sistemul vibrează liber, pe toată durata mișcării sistemul înmagazinează energie;
- ii. vibrații forțate – sunt produse de o excitație perturbatoare exterioară independentă de caracteristicile sistemului vibrant. Sistemul înmagazinează energie pe toată durata mișcării; forțele perturbatoare pot fi armonice, periodice sau oarecare;
- iii. vibrații parametrice – sunt produse de vibrația periodică a unui parametru al mișcării: masa, constanta elastică sau amortizarea, care sunt variabile în timp;
- iv. vibrații autoexcitate – produse de cauze interne ale sistemului;
- v. șocul – caracterizează un fenomen extrem de rapid și de mare intensitate; dacă șocul este de foarte scurtă durată vibrația se transformă în vibrație liberă.

## c) După forța de rezistență:

- i. vibrații neamortizate – forțele de frecare sunt mici și se neglijează;
- ii. vibrații amortizate – forțele interioare nu se pot neglija și în interiorul sistemului se produc disipări importante de energie.

## d. După modul de exprimare a excitației sau a răspunsului:

- iii. vibrații deterministe – orice mărime ce caracterizează vibrația poate fi determinată, la un moment dat, cunoscând funcția prin care este reprezentată vibrația;
- iv. vibrații aleatoare (nedeterministe) – mărimile caracteristice ale vibrației sunt determinate pe baze probabilistice.



### 1.2.4. Modelarea sistemelor

Structurile de rezistență ale construcțiilor sunt sisteme cu masă distribuită continuu după o anumită lege. Caracteristicile acestor sisteme pot defini un model fizic și un model matematic.

*Modelul fizic* este compus din schema statică a structurii, obținută prin reducerea elementelor de construcție la axele sale, de exemplu: grinzi simplu rezemate, grinzi cu console, grinzi cu zăbrele, arce, cadre etc., la care se atașează mase concentrate sau distribuite (după o anumită lege). Modelul astfel obținut, poartă denumirea de sistem dinamic sau vibrant. În fiuriel 1.1, 1.2. și 1.3. sunt prezentate exemple de modelări dinamice.

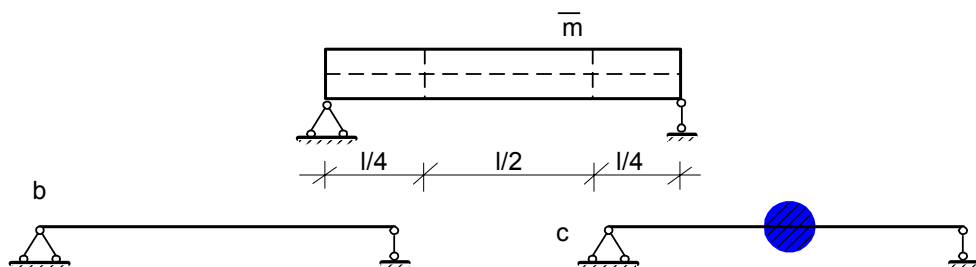


Fig.1.1. Grinda simplu rezemată:

- a. grinda propriu – zisă cu masă distribuită; b. schema statică a grinzii, c. sistemul dinamic (vibrant) cu masă concentrată

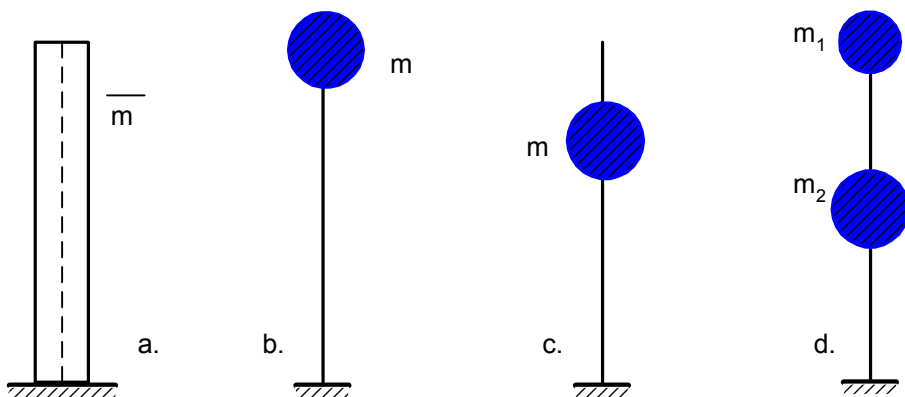


Fig.1.2. Grinda încadrată :

- a. grinda propriu – zisă cu masă distribuită; b., c. și d. sisteme dinamice (vibrante) cu masă concentrată

Orice sistem vibrant este capabil, sub acțiunea unor cauze cu caracter dinamic (variabil în timp), să efectueze mișcări relative în jurul

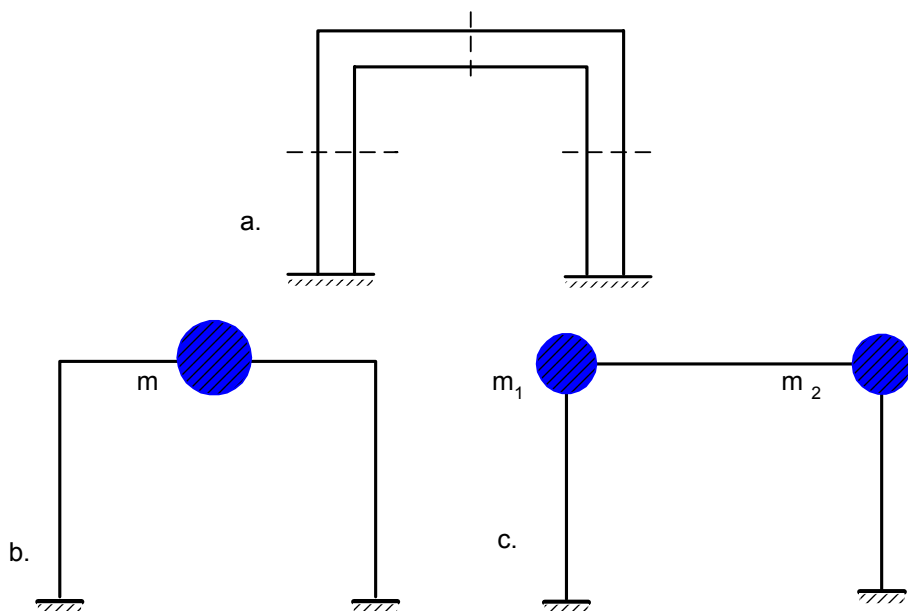


Fig. 1.3. Cadru static nedeterminat: a. cadru propriu-zis; b., c. sisteme dinamice

unei poziții de echilibru. Acest fenomen se datorează faptului că modelul posedă caracteristici elastice și inerțiale. Caracteristicile elastice sunt definite prin rigidități și/sau flexibilități. Cele inerțiale sunt statuate prin mase concentrate sau/și distribuite.

Mișcarea care se repetă, în timp, după o anumită lege se numește *vibrație* sau *mișcare vibratorie*. Mișcarea vibratorie după o anumită perioadă de timp încetează datorită caracteristicilor de amortizare ale sistemului dinamic.

*Modelul matematic* este constituit din ecuațiile de echilibru dinamic al modelului vibrant.

### 1.2.5. Coordonate dinamice

Poziția instantanee a unui sistem vibrant, în orice moment al mișcării, poate fi determinată printr-o infinitate de parametri independenți sau coordonate dinamice, numite și grade de libertate dinamică (notate, pe scurt, GLD).

Deplasările măsurate pe direcția GLD reprezintă nenoscutele fundamentale ale Dinamicii Structurilor.

În vederea simplificării modelului dinamic, sistemul dinamic cu masă distribuită poate fi transformat, presupunând un anumit grad de aproximare, într-un sistem cu mase distribuite. Gradul de aproximare este cu atât mai mare cu cât numărul de mase este mai mic.

Pentru un sistem static, numit și model static, se pot evidenția caracteristicile statice, definite prin intermediul gradului de nedeterminare statică, notat – GNS și gradul de nedeterminare cinematico-elastică, GNCE, figura 1.4.

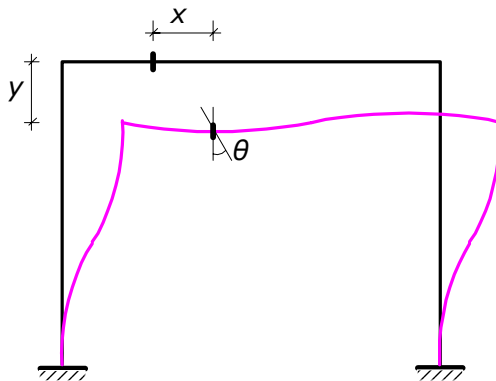


Fig. 1.4. Poziția inițială și deplasată a unui cadru;  
 $x$ ,  $y$  și  $\theta$  – coordonate statice

Prin grad de nedeterminare statică, al unei structuri static nedeterminată, se înțelege numărul minim de legături care trebuie suprimate pentru ca structura să devină static determinată. Se determină cu relația:

$$\text{GNS} = (l + r) - 3c \quad (1.1)$$

sau

$$\text{GNS} = 3k - \sum s \quad (1.2)$$

unde:  $l$  reprezintă numărul de legături simple interioare,

$r$  – numărul de legături simple din reazeme;

$k$  – numărul de contururi distincte;

$s$  – numărul de legături simple lipsă unui contur pentru ca acesta să fie de trei ori static nedeterminat;

$c$  – numărul de corpuri.

Prin grad de nedeterminare cinematico-elastică a unei structuri se înțelege posibilitățile distincte de deplasare a nodurilor. Se stabilește cu relația:

$$\text{GNCE} = 3 * N, \quad (1.3)$$

pentru structuri plane și cu formula

$$GNCE = 6 * N, \quad (1.4)$$

pentru structuri spațiale.

Gradul de nedeterminare cinematico-elastică a unei structuri se poate determina și cu relația:

$$GNCE = N + g, \quad (1.5)$$

$$g = 3 * c - (l + r), \quad (1.6)$$

unde: N reprezintă numărul de noduri rigide,

g – numărul de grade de libertate, care se determină pe o structură obținută din structura dată (static nedeterminată) prin introducerea de articulații în nodurile rigide și în reazemele încastrate; c, l, r – idem relația (1.1).

Gradul de libertate dinamică se determină cu relațiile:

$$GLD = 3 * N \quad (1.7)$$

pentru sisteme dinamice plane și

$$GLD = 6 * N, \quad (1.8)$$

pentru sistemele dinamice aflate într-o stare spațială de comportare, unde N reprezintă numărul de mase concentrate, sau cu formula:

$$GLD = \infty, \quad (1.9)$$

în cazul sistemelor dinamice cu mase distribuite după o anumită lege de variație.

Asemănarea dintre relații (1.3) și (1.6), respectiv (1.4) cu (1.7) ne relevă faptul că gradul de nedeterminare cinematico-elastică, determinat pentru un model static, este egal cu gradul de libertate dinamică, dacă sistemul dinamic, pe care de determină GLD, este obținut prin concentrarea maselor în nodurile rigide ale modelului static, figura 1.5.

Referitor la relațiile (1.6) și (1.7) este de menționat faptul că la acordarea numărului de grade de libertate dinamică se va lua în considerare numai deplasările importante. Astfel, în cazul situațiilor din figura 1.6, numărul real al gradelor de libertate este mai mic decât cel obținut din calcul, aplicând relația (1.6), deoarece unele deplasări dinamice sunt nesemnificative în comparație cu altele.

### 1.2.6. Sistem dinamic (vibrant)

Asocierea următoarelor caracteristici fundamentale:

- a) inerțială (generată de mișcare);
- b) disipativă (generată de capacitatea de amortizare);
- c) elastică, datorată de proprietățile de deformabilitate ale sistemului, care nu se modifică pe toată durata mișcării,

se numește (reprezintă un) sistem dinamic (model dinamic, sistem vibrant).

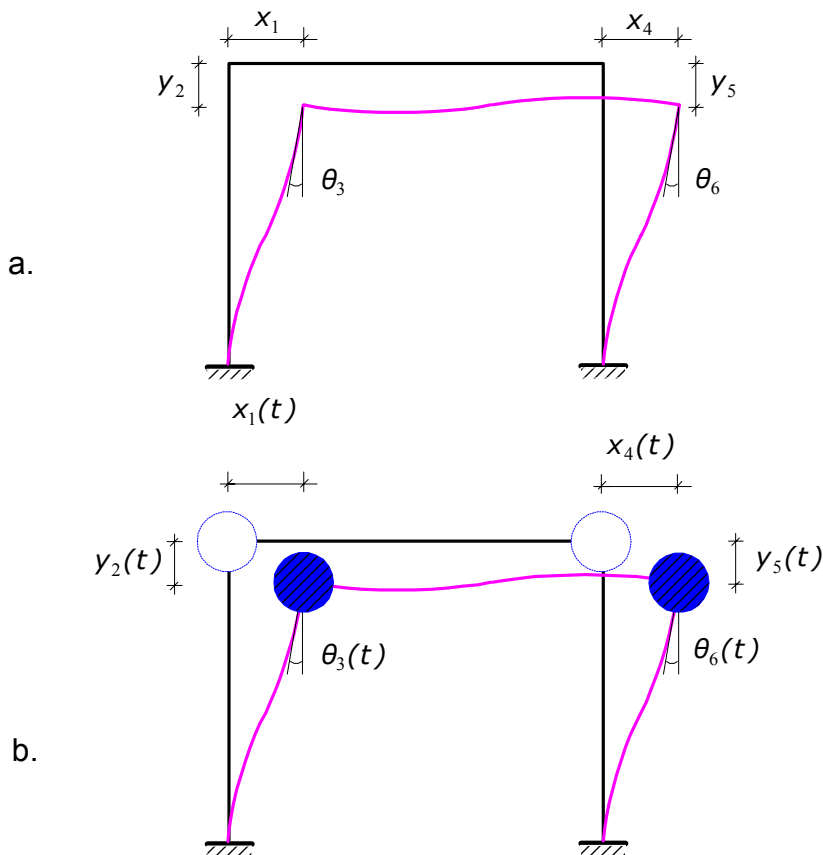


Fig. 1.5. Model static și model dinamic. Comparație între gradele de nedeterminare cinemato-elastice și gradele de libertate dinamică:

- a. structura deformată a modelului static se caracterizează prin GNCE = 6 (două noduri a câte trei deplasări);
- b. modelul dinamic definește GLD = 6 (două mase a câte 3GLD)

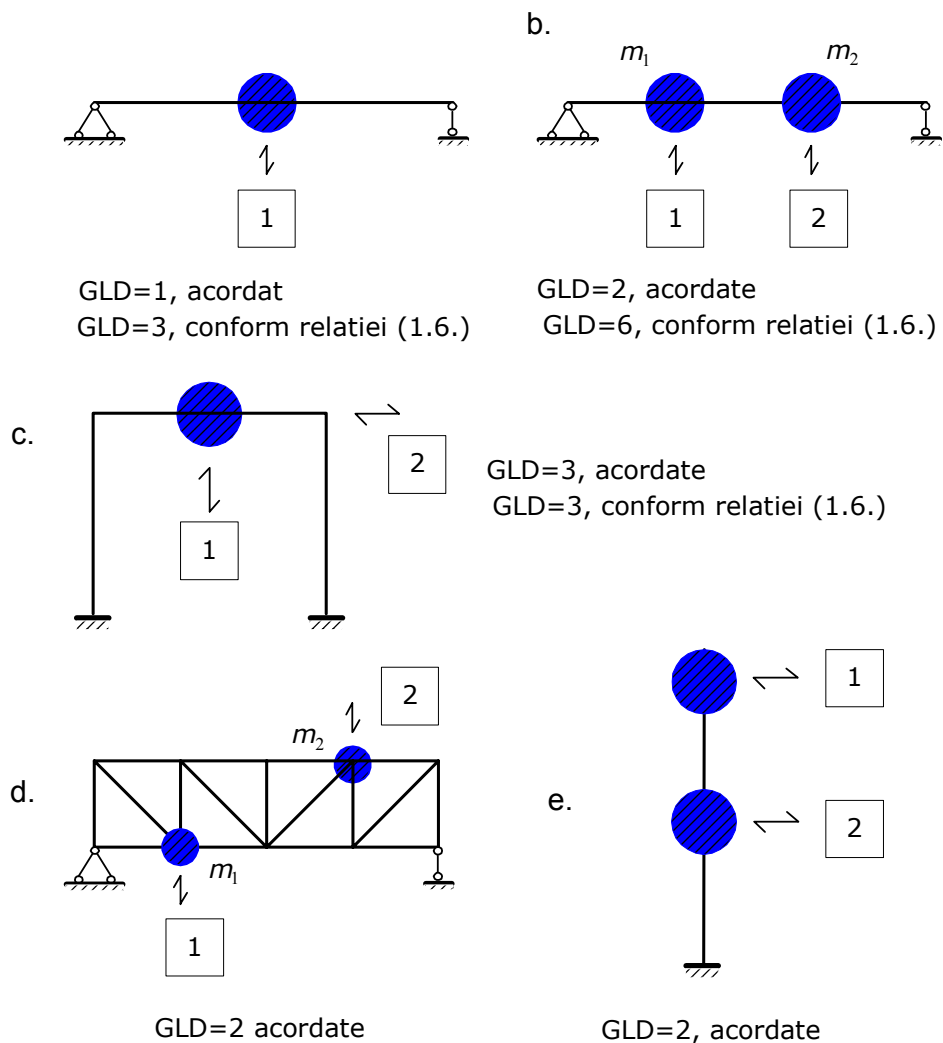


Fig. 6. Modalități de acordare a gradelor de libertate dinamică pentru diverse modele dinamice

Cel mai simplu sistem dinamic poate fi obținut prin asamblarea unei mase cu un element elastic caracterizat prin flexibilitate, notată  $\delta$  sau rigiditate, notată  $k$ , în anumite condiții de fixare în plan sau spațiu, figura 1.7.

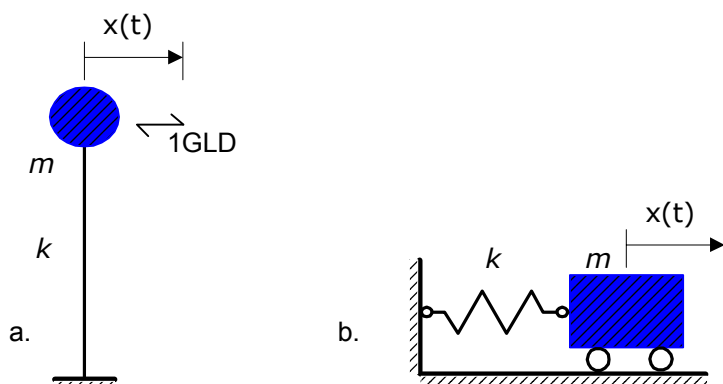


Fig. 1.7. Sisteme dinamice cu 1GLD

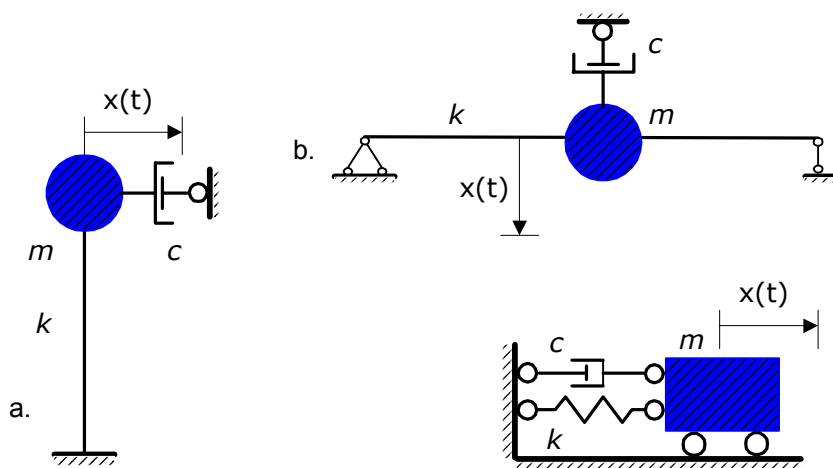


Fig. 1.8. Sisteme dinamice complete cu 1GLD

În Dinamica Structurilor pentru realizarea sistemelor dinamice se utilizează o serie de modele reologice, printre care menționăm: modelul Hooke, modelul Newton, modelul Kelvin – Voigt, modelul Maxwell etc., figura 1.9.

Descrierea analitică a comportării unui sistem dinamic se realizează pe baza unui model matematic.

**Masa.** Masa a fost definită de Newton ca o noțiune care reflectă proprietățile generale și obiective de inerție și gravitație ale materiei.

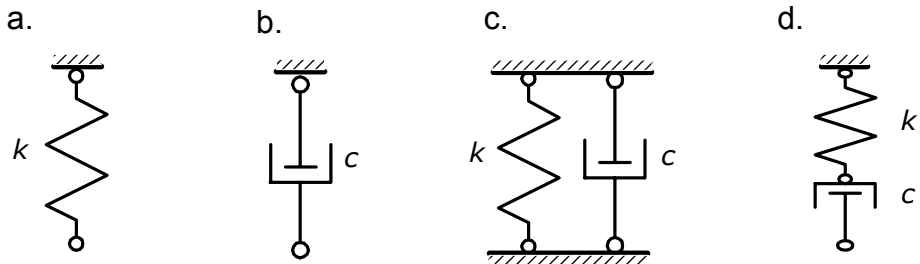


Fig. 1.9. Modele reologice: a. Hooke; b. Newton; c. Kelvin-Voigt; d. Maxwell

Masa se determină cu relația:

$$m = \rho * V, [\text{kg}] \quad (1.9)$$

unde:  $\rho$  reprezintă densitatea materialului,  $[\text{kg m}^{-3}]$ ;  
 $V$  – volumul materialului,  $[\text{m}^3]$ .

Masa se poate calcula și cu relația:

$$m = \rho \frac{G}{\gamma}, [\text{kg}] \quad (1.10)$$

în care:  $\gamma$  reprezintă greutatea specifică a materialului, unitatea de măsură:  $[\text{N m}^{-3}]$ ;

$G$  – greutatea corpului, unitate de măsură:  $[\text{N}]$ .

Egalând relațiile (1.9) și (1.10) rezultă:

$$\rho V = \rho \frac{G}{\gamma}$$

sau

$$V = \rho \frac{G}{\gamma} = \rho \frac{mg}{\gamma},$$

în final:

$$m = V \frac{\gamma}{g}. \quad (1.11)$$

Relația (1.11) se utilizează pentru determinarea masei prin intermediul volumului materiei,  $V$ , greutatea specifică a acesteia,  $\gamma$  și accelerația gravitațională,  $g$ .



*Caracteristica disipativă.* În cazul amortizării vâscoase, caracteristică disipativă se evidențiază prin intermediul coeficientului de amortizare vâscoase, notat  $c$ . Considerând forța de amortizare proporțională cu viteza prin intermediul coeficientului de amortizare, aceasta se determină cu relația:

$$F_a = c * v \quad (1.12)$$

unde:  $F_a$  reprezintă forța de amortizare, [N];  
 $v$  – viteza, [ $\text{ms}^{-1}$ ];  
 $c$  – coeficientul de amortizare vâscoasă.

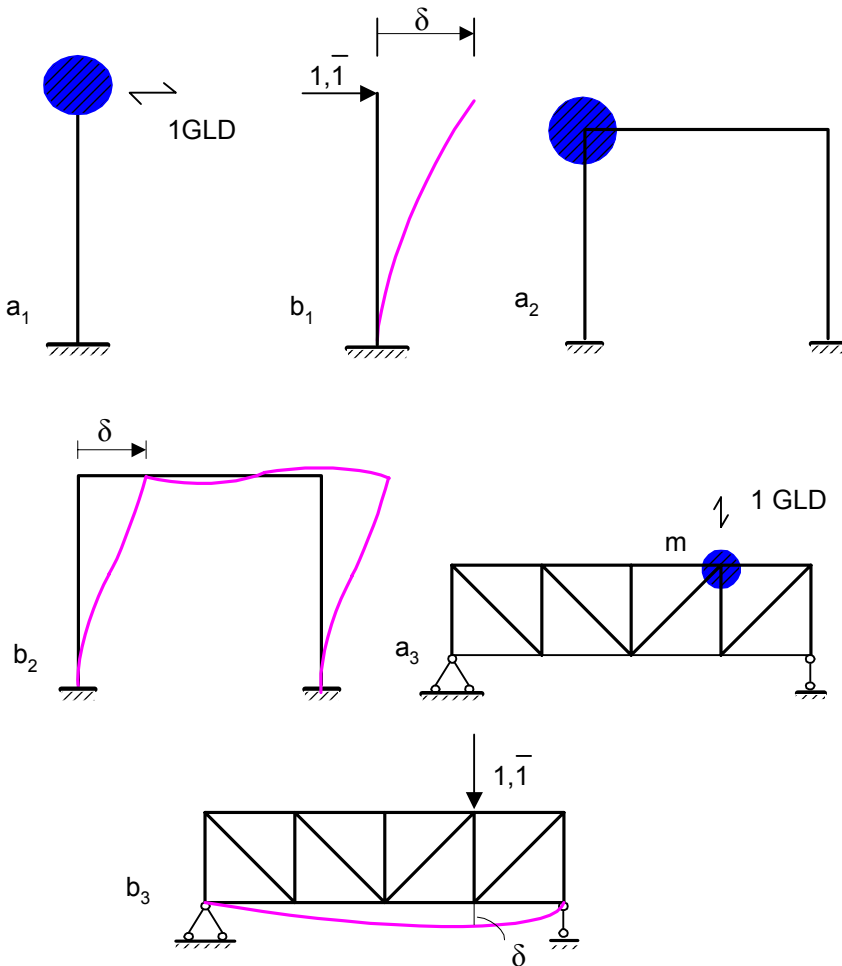


Fig. 1.10. Sisteme vibrante. Situații de încărcare pentru determinarea flexibilității,  $\delta$ .

Din relația (1.12) se exprimă coeficientul de amortizare:

$$c = \frac{F_a}{v} \quad (1.13)$$

și apare evidentă că unitatea de măsură este:  $[N \cdot m^{-1} \cdot s]$  sau  $[kg \cdot s^{-1}]$ .

*Caracteristica elastică. Flexibilitatea*, notată  $\delta$ , se definește ca fiind deplasarea măsurată pe direcția gradului de libertate dinamică a unui sistem vibrant, produsă de o forță egală cu unitatea aplicată în dreptul masei și pe direcția GLD. Se calculează cu relația Mohr - Maxwell:

$$\delta = \sum \int \frac{\bar{M}(x) * M(x)}{EI} dx, [m \cdot N^{-1}] \quad (1.14)$$

În figura 1.10. sunt prezentate diverse situații de încărcare pentru calculul flexibilității.

*Rigiditatea* reprezintă, în cazul unui sistem vibrant cu 1 GLD, forța care acționând în dreptul masei și pe direcția GLD, produce pe această direcție o deplasare egală cu unitatea, figura 1.11.

Rigiditatea este inversul flexibilității. Rezultă relația:

$$\delta * k = 1. \quad (1.15)$$

Apare evident că unitatea de măsură a rigidității este:  $[N \cdot m^{-1}]$ .

Pentru aflarea numărului de grade de nedeterminare statică a unei structuri se folosește și relația:

$$GNS = 3 \cdot k - a - 2 \cdot s \quad (1.2)$$

unde:  $k$  reprezintă numărul de conturi închise;

3 - numărul de nedeterminări simple introduse de un contur închis;

$a$  - numărul de articulații simple. Articulația simplă leagă două bare între ele. Într-un nod cu  $n$  bare articulate între ele sunt  $n-1$  articulații simple;

$s$  - numărul reazemelor simple.

Obs. 1. Orice articulație simplă interioară sau cu terenul reprezintă o legătură mai puțin, deci existența unei articulații simple reduce gradul de nedeterminare statică cu o unitate

2. Un reazem simplu reprezintă două legături simple mai puțin față de încastrare, deci reduce cu două unități gradul de nedeterminare statică.

În cazul determinării numărului de grade de libertate a unui cadru se poate utiliza și relația:

$$g = 3 \cdot b - 2 \cdot a - s \quad (1.3)$$

în care:  $b$  reprezintă numărul de bare dintr-un mecanism (sistem cinematic cu un singur grad de libertate cinematică);

3 - numărul de grade de libertate ale unui corp în plan, deci pentru  $b$  bare care alcătuiesc o structură vor exista  $3b$  grade de libertate;

$a$  - numărul de articulații simple;

2 - numărul de legături simple introduse de o articulație în plan;

$s$  - numărul de legături simple (reazeme simple - legături simple cu terenul).

## CURSUL 2

### SISTEME CU UN GRAD DE LIBERTATE DINAMICĂ

#### 2.1. Vibrațiile libere ale sistemelor cu 1GLD

##### 2.1.1. Ecuații de echilibru

Ecuațiile de echilibru care guvernează mișcările unui sistem cu 1 GLD, figura 2.1, se deduc prin exprimarea echilibrului dinamic instantaneu. Echilibrul dinamic, conform principiului lui d'Alembert, se reduce la un echilibru static prin includerea și a forței de inerție. Echilibrul dinamic se exprimă în raport cu poziția de echilibru static al sistemului vibrant.

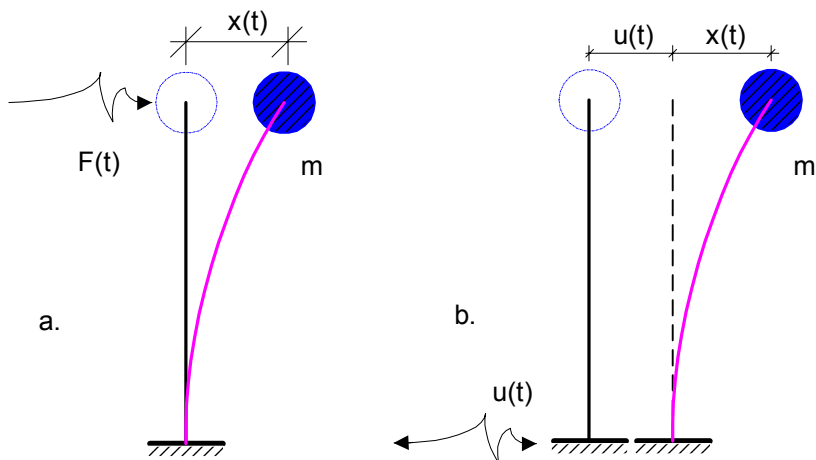


Fig.2.1. Modalități de acționare a sistemelor cu 1GLD:  
a. aplicarea directă a acțiunii, b. aplicarea indirectă a acțiunii

Forțele care intervin în ecuațiile generale de condiție sunt incluse în două categorii:

- a. forțe active, care întrețin mișcarea, clasificate în:
  - i. acțiuni exterioare;
  - ii. forțe de inerție, generate de masele în mișcare;
- b. forțe pasive, care se opun mișcării, numite și forțe de rezistență, generate de caracteristicile elastice și disipative generate de amortizare, distingem:
  - i. forța elastică;
  - ii. forța de amortizare.

Acțiunile exterioare care se manifestă asupra sistemelor cu 1GLD se pot clasifica în două categorii, în acest sens nominalizăm:

- a. acțiuni aplicate direct pe sistem, figura 2.1.a, notate  $F(t)$ ;
- b. acțiuni aplicate indirect prin intermediul unei deplasări aplicate bazei de rezemare a sistemului, figura 2.1.b, notate  $u(t)$ .

Forțele care participă la echilibrul dinamic instantaneu, în cazul acțiunilor aplicate direct pe sistem, figura 2.1, sunt următoarele:

- a. forța de inerție:
  - i. notație -  $F_i(t)$ ;
  - ii. relație de calcul:

$$F_i(t) = -m\ddot{x}(t); \quad (2.1)$$

iii. unitate de măsură – [N],

unde : m reprezintă masa concentrată a sistemului vibrant;

$x(t)$  – deplasarea dinamică instantanee;

$\ddot{x}(t)$  – accelerația;

b. forța de amortizare:

i. notație -  $F_a(t)$ ;

ii. relație de calcul:

$$F_a(t) = -c\dot{x}(t); \quad (2.2)$$

iii. unitate de măsură – [Kgs<sup>-1</sup>],

în care: c reprezintă coeficientul de amortizare vâscoasă;

$\dot{x}(t)$  – viteza;

c. forța perturbatoare:

i. notație -  $F(t)$ ;

ii. relație de calcul, în cazul acțiunilor armonice:

$$F(t) = F_0 \sin \theta t; \quad (2.3)$$

iii. unitate de măsură – [N],

unde:  $F_0$  reprezintă amplitudinea forței perturbatoare, măsurată în [N],

$\theta$  – pulsația proprie a forței perturbatoare, măsurată în [rad s<sup>-1</sup>];

d. forța elastică:

i. notație -  $F_e(t)$ ;

ii. relație de calcul:

$$F_e(t) = kx(t); \quad (2.4)$$

iii. unitate de măsură – [N],

în care: k reprezintă rigiditatea măsurată în [Nm<sup>-1</sup>].

Obs.: În cazul aplicării indirecte a acțiunilor pe sistemul vibrant, prin intermediul deplasării bazei sistemului, de exemplu producerea unei mișcări seismice, forța de inerție se determină cu relația:

$$F_i(t) = -m(\ddot{x}(t) + \ddot{u}(t)), \quad (2.5)$$

unde:  $m(\ddot{x}(t) + \ddot{u}(t))$  reprezintă accelerația absolută instantanee.

Ecuatiile mișcării vor fi:

a. în cazul aplicării directe a acțiunilor:

$$F_a(t) + F_e(t) = F(t) + F_i(t) \quad (2.6)$$

sau introducând expresiile forțelor, relațiile: (2.2), (2.4) și (2.5), se ajunge la forma:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F_0 \sin \theta t; \quad (2.7)$$

b. pentru situația aplicării indirecte a acțiunilor:

$$F_a(t) + F_e(t) = F_i(t) \quad (2.8)$$

sau înlocuind relațiile de definire a forțelor, relațiile: (2.1), (2.2) și (2.4), obținem

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = -m\ddot{u}(t). \quad (2.9)$$

### 2.1.2. Vibrații libere fără amortizare

Se consideră un sistem vibrant cu 1GLD, fără caracteristici disipative, constituit dintr-o masă și un element elastic, figura 2.2. Cum forțele perturbatoare sunt nule, atunci ecuația (2.7) se reduce la forma:

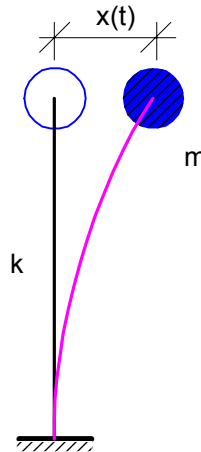


Fig. 2.2. Model dinamic simplu

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0. \quad (2.10)$$

Prin împărțirea termenilor ecuației prin masă, ecuația (2.10) devine:

$$\ddot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0. \quad (2.11)$$

Pentru a defini pulsația proprie a sistemului se introduce relația:

$$\omega^2 = \frac{k}{m}, \quad (2.12)$$

în care:  $\omega$  reprezintă pulsația proprie a sistemului vibrant.

Ecuația (2.10) are alura:

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0. \quad (2.13)$$

Deoarece virajile unui sistem dinamic, fără a fi acționat de forțe perturbare, au un caracter armonic, soluția ecuației (2.13) este:

$$x(t) = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t. \quad (2.14)$$

Prin derivări succesive se calculează expresiile vitezelor și accelerațiilor:

$$\dot{x}(t) = C_1 \omega \cos \omega t - C_2 \sin \omega t, \quad (2.15)$$

$$\ddot{x}(t) = -C_1 \omega^2 \sin \omega t - C_2 \omega^2 \cos \omega t. \quad (2.16)$$

Constantele  $C_1$  și  $C_2$  se determină din condițiile inițiale ale mișcării, pentru o deplasare și o viteză. Deci, la momentul  $t = 0$ , cunoaștem:

$$t = 0 \begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases}. \quad (2.17)$$

Introducând condițiile (2.17) în relațiile (2.14) și (2.15) se obțin expresiile:

$$C_1 = \frac{v_0}{\omega}, \quad C_2 = x_0. \quad (2.18)$$

Cu expresiile (2.18), relația (2.14) devine:

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t + x_0 \cos \omega t \quad (2.19)$$

sau comparând cele două mișcări rezultă:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi). \quad (2.20)$$

Amplitudinea mișcării, notată  $A$ , se determină cu relația:

$$A = \sqrt{\left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2 + x_0^2}, \quad (2.21)$$

iar faza inițială a vibrației,  $\varphi$ :

$$\varphi = \arctg \frac{x_0 \omega}{v_0}. \quad (2.22)$$

Derivând succesiv relația (2.20) se deduc variațiile vitezelor și accelerațiilor sistemului vibrant:

$$\dot{x}(t) = \omega A \cos(\omega t + \varphi), \quad (2.23)$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x(t). \quad (2.24)$$



Conform relațiilor de mai sus, viteza este defazată cu  $\pi/2$  înaintea deplasării, iar accelerația cu  $\pi/2$  înaintea deplasării.

În figura 2.3 sunt prezentate reprezentările grafice ale expresiilor: (2.20), (2.23), (2.24).

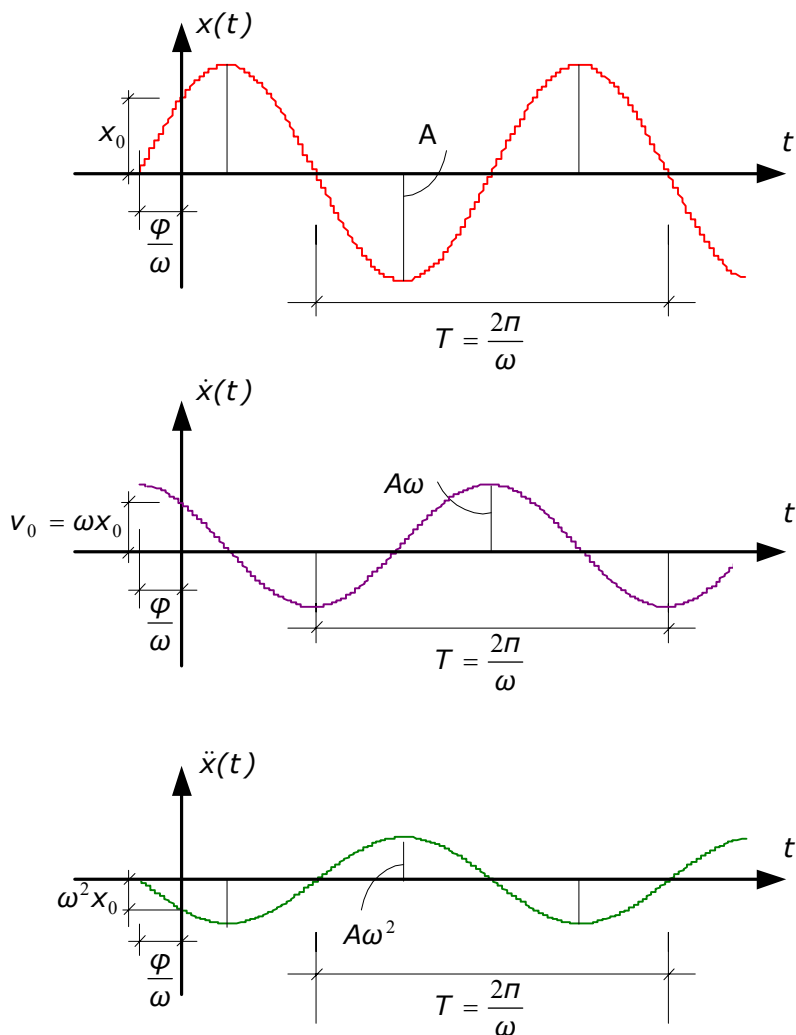


Fig.2.3. Sistem cu 1GLD. Reprezentarea grafică a deplasărilor, vitezelor și accelerațiilor

Analizând reprezentările grafice constatăm:

- reprezentările definesc vibrații armonice;
- mișcările (deplasări, viteze și accelerații) au aceeași pulsație  $\omega$  și, deci, aceeași pulsație  $T$ ;

- c. vibrația liberă are un caracter permanent și de durată infinită, datorită absenței forței de amortizare.

Din studiul relației (2.12) rezultă că pulsația proprie de vibrație,  $\omega$ , este o caracteristică intrinsecă a sistemului vibrant, deoarece depinde de doi parametri de definire ai sistemului: masa,  $m$  și rigiditatea,  $k$ . Se determină cu relația:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (2.25)$$

iar dacă înlocuim rigiditatea cu flexibilitatea, deoarece  $k\delta=1$ , rezultă:

$$\omega = (m\delta)^{-1}. \quad (2.26)$$

*Pulsația proprie* de vibrație reprezintă numărul de vibrații complete care se produc într-un interval de timp egal cu  $2\pi$  secunde.

*Perioada proprie* de vibrație se identifică cu timpul minim necesar pentru ca o mișcare simplă periodică sau oarecare să se repete identic. Se calculează cu relația:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad [s]. \quad (2.27)$$

*Frecvența proprie* semnifică numărul de vibrații complete produse într-un interval de timp egal cu o secundă, se determină cu expresia:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}, \quad [s^{-1}] \text{ sau } [Hz]. \quad (2.28)$$

### 2.1.3. Etape pentru calculul caracteristicilor proprii ale unei vibrații

Pentru determinarea caracteristicilor proprii de vibrație ale unui sistem vibrant se folosesc relațiile de calcul: (2.25) sau (2.26), (2.27) și (2.28), urmând următoarea eșalonare a calculelor:

- a) Stabilirea sistemului vibrant. Se pleacă de la sistemul constructiv real, pentru care se contruiește modelul static (schema statică a structurii), iar prin concentrarea masei într-o secțiune și acordarea gradului de libertate semnificativ se obține sistemul vibrant (modelul dinamic), cu un GLD.
- b) Determinarea flexibilității sau a rigidității sistemului vibrant:
  - b.1.) Calculul flexibilității, figura 2.4:
    - i. notații:  $\delta$  sau  $f$ ;
    - ii. definiție – flexibilitatea reprezintă deplasarea măsurată pe direcția gradului de libertate dinamică a unui sistem

- vibrant, produsă de o forță egală cu unitatea aplicată în dreptul masei și pe direcția gradului de libertate;
- iii. unitate de măsură –  $[mN^{-1}]$ ;
- iv. schema de calcul, figura 2.4;

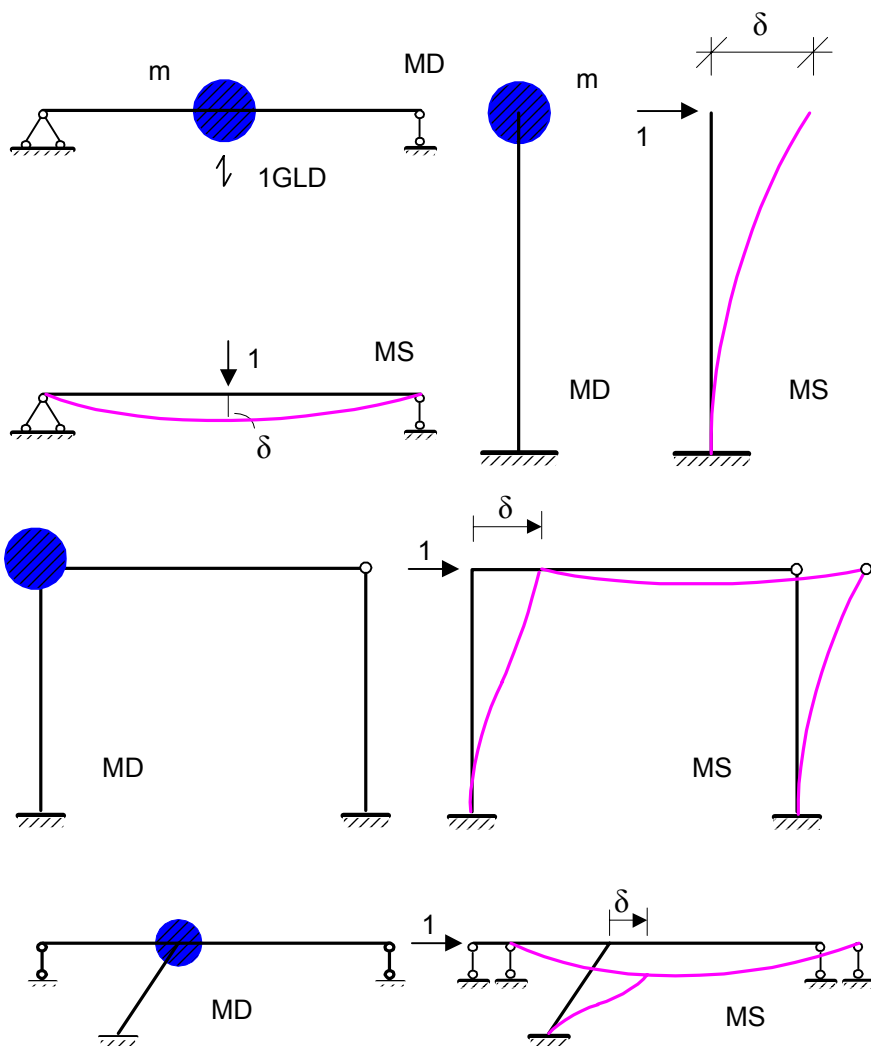


Fig. 2.4. Modele dinamice și situații de încărcare pentru calculul flexibilității

- v. relație de calcul:

$$\delta = \int_0^l \frac{\bar{M}(t)M(t)}{EI} dx. \quad (2.29)$$

Aplicarea relației (2.29) presupune existența a două situații (stări) de încărcare: starea reală și starea virtuală (fictivă). Starea reală a fost definită în figura 2.4. Starea virtuală se constituie din structura dată (schema statică, modelul static) acționată în dreptul masei și pe direcția pe care dorim să determinăm deplasarea, aici direcția este tot direcție GLD, de o forță egală cu unitatea. Rezultă că în cazul sistemelor cu 1GLD cele două stări, reală și virtuală, coincid;

vi. Metode pentru trasarea diagramelor de eforturi. În cazul structurilor static nedeterminate, în vederea trasării diagramelor de eforturi – momente încovoietoare, se folosesc două metode: a eforturilor (a forțelor) și a deplasărilor (deformațiilor).

b.2.) Calculul rigidității, figura 2.5:

- i. notație:  $k$ ;
- ii. definiție – rigiditatea reprezintă forța care aplicată în dreptul masei și pe direcția GLD, produce pe această direcție o deplasare egală cu unitatea;
- iii. unitate de măsură –  $[m^{-1}N]$ ;
- iv. scheme de calcul, figura 2.5.

Există două posibilități de a afla valoarea unei rigidități. *Prima metodă constă* în aplicarea definiției. Forța aplicată pe structură, figura 2.5.a sau b, notată  $k$ , necunoscută, determină pe direcția GLD o deplasare egală cu unitatea. Se aplică metoda Mohr-Maxwell și se calculează expresia deplasării produse de forța  $k$ , care prin egalare cu unitatea evidențiază o ecuație, în care necunoscuta este forța  $k$ . Prin soluționarea ecuației se obține valoarea rigidității.

A doua cale pentru găsirea valorii rigidității constă în blocarea deplasării pe direcția GLD, figura 2.5.c sau d, printr-un blocaj de tip reazem simplu, pentru deplasarea liniară sau un blocaj de nod, pentru deplasarea unghiulară. Reacțiunea din blocaj (blocaj de nod sau reazem simplu), în cazul în care sistemul este acționat cu o cedare de reazem egală cu unitatea, în blocajul introdus fictiv, pe direcția GLD, reprezintă rigiditatea sistemului.

Prin introducerea blocajelor (pentru deplasări liniare sau unghiulare) sistemul vibrant își mărește nedeterminarea statică, în cazul unei structuri static nedeterminată și devine static nedeterminată, în cazul unei structuri static determinată.

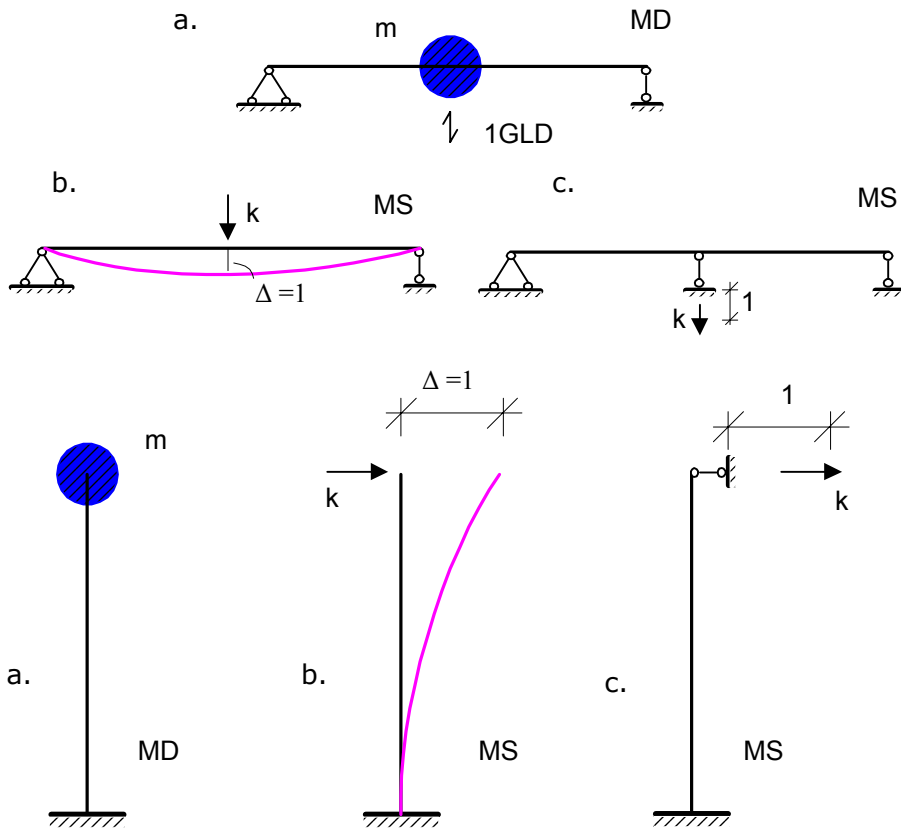


Fig. 2.5. Modele dinamice și situații de încărcare pentru aflarea rigidității: a. model dinamic. b. schemă de calcul cu rigiditatea aplicată ca acțiune; c. schemă de calcul pentru determinarea rigidității ca reacțiune

- c) Determinarea pulsației, frecvenței și perioadei proprii de vibrație:
- c.1.) În cazul în care se lucrează cu flexibilitatea sistemului, pentru aflarea caracteristicilor dinamice se utilizează relațiile: (2.26), (2.27) și (2.28).
  - c.2.) Atunci când se folosește rigiditatea în soluționarea unui sistem dinamic cu un grad de libertate dinamic, la calculul caracteristicilor dinamice se folosesc expresiile: (2.25), (2.27) și (2.28).

### 2.1.4. Vibrații libere cu amortizare vâscoasă

Se consideră un sistem vibrant, figura 2.6, definit prin trei caracteristici:

- a) masa (inertială),  $m$  ;
- b) disipativă, definită prin intermediul coeficientului de amortizare vâscoasă,  $c$  ;
- c) elastică, coeficientul de rigiditate,  $k$  .

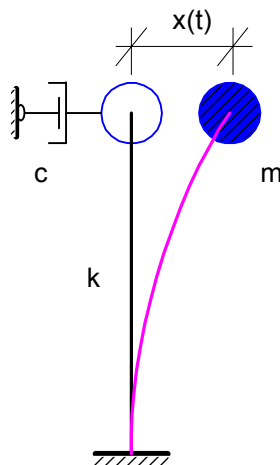


Fig. 2.6. Model dinamic complet

Un astfel de sistem, supus acțiunii unui șoc: deplasare și viteză inițiale, intră în vibrații libere. Dar, deoarece posedă capacitate de amortizare, mișcarea sa încetează după un interval de timp, datorită producerii unei disipări de energie.

În ecuația de echilibru dinamic instantaneu intervin următoarele forțe:

- a) forța de inerție:

$$F_i(t) = -m\ddot{x}(t) ; \quad (2.30)$$

- b) forța de amortizare:

$$F_a(t) = c\dot{x}(t) ; \quad (2.31)$$

- c) forța elastică:

$$F_e(t) = kx(t) . \quad (2.32)$$

Ecuația de mișcare va avea forma de mai jos:

$$F_a(t) + F_e(t) = F_i(t) \quad (2.33)$$

Se introduce în ecuația (2.33) expresiile forțelor, relațiile (2.30), (2.31) și (2.32), și se obține ecuația:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0. \quad (2.34)$$

Pentru a transforma ecuația (2.34) într-o ecuație integrabilă, toți termenii ecuației se împart prin masa sistemului,  $m$ , rezultă:

$$\ddot{x}(t) + \frac{c}{m} \dot{x}(t) + \frac{k}{m} x(t) = 0. \quad (2.35)$$

Se introduc notațiile:

$$\frac{c}{m} = 2\beta \quad (2.36)$$

și

$$\frac{k}{m} = \omega^2, \quad (2.37)$$

iar ecuația (2.35) devine:

$$\ddot{x}(t) + 2\beta\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0, \quad (2.38)$$

cu ecuația caracteristică:

$$r^2 + 2\beta r + \omega^2 = 0, \quad (2.39)$$

ale cărei rădăcini sunt:

$$r_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega^2}. \quad (2.40)$$

În funcție de valoarea discriminantului, distingem următoarele cazuri de amortizare în sistemul vibrant:

a) amortizare critică când este îndeplinită condiția:

$$\beta^2 - \omega^2 = 0; \quad (2.41)$$

b) amortizare supracritică:

$$\beta^2 - \omega^2 > 0; \quad (2.42)$$

c) amortizare subcritică:

$$\beta^2 - \omega^2 < 0. \quad (2.43)$$

În cazul amortizării critice valoarea coeficientului de amortizare, pentru care se anulează discriminantul, poartă denumirea de coeficient de amortizare critică, notat  $c_{cr}$ . Se introduce expresia (2.36) în relația (2.41):

$$\frac{c_{cr}^2}{4m^2} - \omega^2 = 0$$

de unde

$$c_{cr} = 2m\omega . \quad (2.44)$$

Se introduce noțiunea de fracțiune din amortizarea critică, notată  $v$ , care, prin definiție, reprezintă raportul dintre coeficientul de amortizare,  $c$  și coeficientul de amortizare critică,  $c_{cr}$ , astfel:

$$v = \frac{c}{c_{cr}} \quad (2.45)$$

sau dacă se introduce în relația (2.45), expresiile (2.36) și (2.44) aceasta devine:

$$v = \frac{2m\beta}{2m\omega} . \quad (2.46)$$

Din ultima expresie, se poate pune în evidență o relație de calcul pentru coeficientul de amortizare  $\beta$ , funcție de fracțiunea din amortizarea critică și pulsația proprie:

$$\beta = v\omega . \quad (2.47)$$

Mișcarea vibratorie, în cazul amortizării critice, își pierde caracterul vibratoriu și poartă denumirea de mișcare aperiodică.

Amortizarea supracritică nu este proprie construcțiilor, mișcarea sistemului este tot o mișcare aperiodică.

Se vor analiza, în continuare, sistemele vibratorii care posedă amortizarea subcritică, proprii construcțiilor. Aceste sisteme sunt caracterizate prin:

$$c < c_{cr}$$

și

$$v < 1 ,$$

iar rădăcinile ecuației caracteristice sunt imaginare:

$$r_{1,2} = -\beta \pm j\sqrt{\omega^2 - \beta^2} , \quad (2.48)$$

unde  $j = \sqrt{-1}$

și

$$r_{1,2} = -\beta \pm j\omega^* , \quad (2.49)$$

în care

$$\omega^* = \sqrt{\omega^2 - \beta^2} , \quad (2.50)$$



iar  $\omega^*$  reprezintă pulsația proprie a sistemului vibrant, când se ia în considerare amortizarea.

Soluția ecuației (2.38) este:

$$x(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \quad (2.51)$$

și

$$x(t) = Ae^{(-\beta + j\omega^*)t} + Be^{(-\beta - j\omega^*)t} \quad (2.52)$$

sau

$$x(t) = e^{-\beta t} (Ae^{j\omega^* t} + Be^{-j\omega^* t}). \quad (2.53)$$

De asemenea, se poate exprima deplasarea prin relația:

$$x(t) = e^{-\beta t} (C_1 \sin \omega^* t + C_2 \cos \omega^* t) \quad (2.54)$$

sau

$$x(t) = A \sin(\omega^* t + \varphi^*), \quad (2.55)$$

unde

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad (2.56)$$

$$\operatorname{tg} \varphi^* = \frac{C_2}{C_1}. \quad (2.57)$$

Constantele de integrare se determină din condiții inițiale:

$$t = 0 \quad \begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases}, \quad (2.58)$$

rezultă:

$$C_1 = \frac{v_0 + v\omega x_0}{\omega^*}, \quad (2.59)$$

$$C_2 = x_0. \quad (2.60)$$

Mișcarea descrisă de funcția (2.55) reprezintă o mișcare armonică de pulsație  $\omega^*$  și amplitudine  $Ae^{-\beta t}$ , care descrește exponențial în timp și care se numește mișcare pseudoarmonică. Reprezentarea unei astfel de mișcări este prezentată în figura 2.7.

Caracteristicile dinamice proprii ale mișcării sunt:

a) pulsația proprie, calculată cu relația:

$$\omega^* = \sqrt{\omega^2 - \beta^2} \quad (2.61)$$

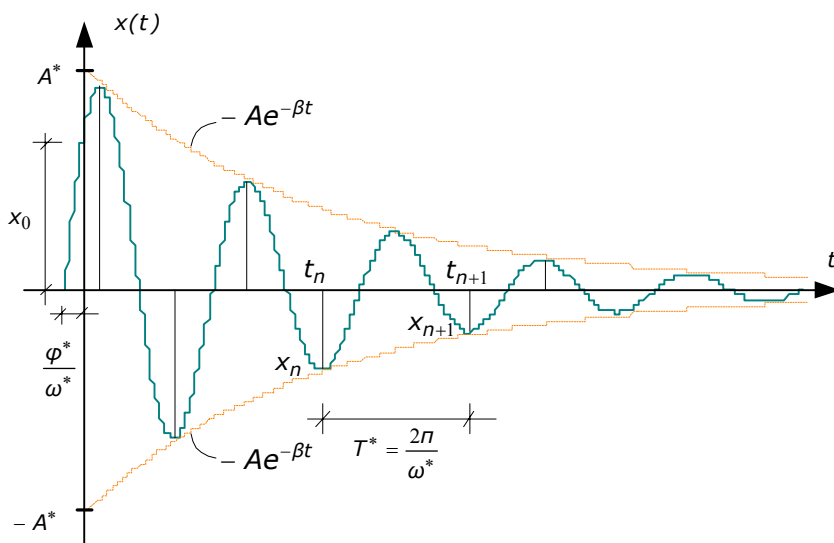


Fig. 2.7. Reprezentarea grafică a unei mișcări pseudoarmonice

și conform expresiei (2.47) rezultă:

$$\omega^* = \omega \sqrt{1 - \nu^2} ; \quad (2.62)$$

b) frecvența proprie:

$$f^* = f \sqrt{1 - \nu^2} ; \quad (2.63)$$

c) perioada proprie:

$$T^* = \frac{T}{\sqrt{1 - \nu^2}} . \quad (2.64)$$

Experimental s-au obținut valori ale fracțiunii din amortizarea critică pentru diferite materiale și construcții, acestea sunt prezentate în tabelul nr.1.

Tabelul nr.1. Frațiunea din amortizarea critică

| Construcții și terenuri                          | $\nu$ , fracțiunea din amortizarea critică |
|--------------------------------------------------|--------------------------------------------|
| Construcție cu structura din beton armat monolit | 0.02 – 0.14                                |
| Construcție cu structura din zidărie             | 0.06 – 0.18                                |
| Construcție industrială cu structura monolită    | 0.02 – 0.06                                |

|                        |              |
|------------------------|--------------|
| Poduri din beton armat | 0.03 – 0.016 |
| Poduri metalice        | 0.02 – 0.08  |
| Construcții masive     | 0.05 – 0.1   |
| Terenuri de fundare    | 0.06 – 0.3   |
| Nisip compact          | 0.1          |

Analizând valorile din tabel, global, se consideră că pentru sectorul de construcții se poate accepta, referitor la fracțiunea din amortizarea critică, valoare:

$$\nu \approx 0.2 \quad (2.65)$$

și, deci

$$\omega^* \approx \omega, \quad f^* \approx f, \quad T^* = T. \quad (2.66)$$

Gradul de amortizare al unei construcții se definește prin intermediul decrementului logaritmic, notat  $\Delta$ .

Decrementul logaritmic al amortizării reprezintă logaritmul natural al raportului dintre două amplitudinii succesive decalate de o perioadă, figura 2.7.

$$\Delta = \ln \frac{x_n}{x_{n+1}}. \quad (2.67)$$

Dar, se cunoaște că

$$x_n = Ae^{-\beta t_n} \quad (2.68)$$

și

$$x_{n+1} = Ae^{-\beta t_{n+1}}. \quad (2.69)$$

Introducând (2.68) și (2.69) în (2.67) rezultă

$$\Delta = \beta T^* = \nu \omega T^* = \nu \frac{2\pi}{T} T^* \quad (2.70)$$

sau

$$\Delta = 2\pi \nu. \quad (2.71)$$

# CURSUL 3

## SISTEME VIBRANTE CU 1GLD

### 3.1 Vibrații forțate neamortizate

Se consideră un sistem vibrant cu 1GLD acționat de o forță perturbatoare de tip armonic, figura 3.1.

Forțele care își fac echilibru sunt:

a) forța de inerție

$$F_i(t) = -m\ddot{x}(t) ; \quad (3.1)$$

b) forța elastică

$$F_e(t) = kx(t) ; \quad (3.2)$$

c) forța perturbatoare

$$F(t) = F_0 \sin \theta t . \quad (3.3)$$

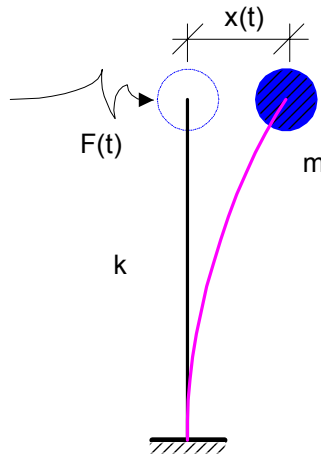


Fig. 3.1. Sistem vibrant acționat de o forță armonică

Conform principiului lui d'Alembert ecuația de echilibru dinamic instantaneu va avea forma:

$$F_e(t) = F_i(t) + F(t) \quad (3.4)$$

sau înlocuind expresiile forțelor, relațiile (3.1), (3.2) și (3.3), în ecuația (3.4), aceasta devine:

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = F_0 \sin \theta t . \quad (3.5)$$

Se împarte fiecare termen al ecuației prin masa sistemului vibrant și se obține o nouă formă a ecuației

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \frac{F_0}{m} \sin \theta t . \quad (3.6)$$

Soluția generală a ecuației (3.6) este:

$$x(t) = x_L(t) + x_F(t) , \quad (3.7)$$

unde:  $x_L(t)$  reprezintă soluția ecuației omogene corespunzătoare vibrațiilor libere și are forma:

$$x_L(t) = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t ; \quad (3.8)$$

$x_F(t)$  - soluția particulară, corespunde perturbației armonice și reprezintă răspunsul forțat al sistemului, se prezintă sub forma:

$$x_F(t) = M \sin \theta t + N \cos \theta t . \quad (3.9)$$

Această soluție, relația (3.9), trebuie să satisfacă ecuația mișcării (3.6). Pentru aceasta, soluția (3.9) se derivează succesiv de două ori:

$$\dot{x}_F(t) = M\theta \sin \theta t - N\theta \cos \theta t \quad (3.10)$$

și

$$\ddot{x}_F(t) = -M\theta^2 \sin \theta t - N\theta^2 \cos \theta t . \quad (3.11)$$

Introducând expresiile (3.9), (3.10) și (3.11) în ecuația (3.6) se obține:

$$-\theta^2(M \sin \theta t + N \cos \theta t) + \omega^2(M \sin \theta t + N \cos \theta t) = \frac{F_0}{m} \sin \theta t \quad (3.12)$$

sau

$$M(\omega^2 - \theta^2) \sin \theta t + N((\omega^2 - \theta^2) \cos \theta t) = \frac{F_0}{m} \sin \theta t . \quad (3.13)$$

Prin identificarea coeficienților funcțiilor trigonometrice se determină constantele  $M$  și  $N$ :

$$M(\omega^2 - \theta^2) = \frac{F_0}{m} \quad (3.14)$$

și

$$N((\omega^2 - \theta^2) \cos \theta t) = 0 \quad (3.15)$$

sau

$$M = \frac{F_0}{m(\omega^2 - \theta^2)} \quad (3.16)$$

și

$$N = 0 \quad (3.17)$$

Soluția particulară devine:

$$x_F(t) = \frac{F_0}{m(\omega^2 - \theta^2)} \sin \theta t , \quad (3.18)$$

iar cea generală:

$$X(t) = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t + \frac{F_0}{m(\omega^2 - \theta^2)} \sin \theta t \quad (3.19)$$

și

$$\dot{X}(t) = C_1 \omega \cos \omega t - C_2 \omega \sin \omega t + \frac{F_0 \theta}{m(\omega^2 - \theta^2)} \cos \theta t. \quad (3.20)$$

Constantele  $C_1$  și  $C_2$  se determină din condiții inițiale:

$$t = 0 \begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases}. \quad (3.21)$$

Conform relațiilor (3.19), (3.20) și (3.21) rezultă:

$$C_1 = \frac{v_0}{\omega} - \frac{\theta}{\omega} \frac{F_0}{m(\omega^2 - \theta^2)}, \quad (3.22)$$

$$C_2 = x_0. \quad (3.23)$$

Soluția generală ia forma:

$$X(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t + x_0 \cos \omega t + \frac{F_0}{m(\omega^2 - \theta^2)} \left( \sin \theta t - \frac{\theta}{\omega} \sin \omega t \right). \quad (3.24)$$

În regim staționar soluția este:

$$X(t) = \frac{F_0}{m(\omega^2 - \theta^2)} \left( \sin \theta t - \frac{\theta}{\omega} \sin \omega t \right). \quad (3.25)$$

Factorul adimensional al relației (3.25) se rearanjează sub forma:

$$\frac{F_0}{m(\omega^2 - \theta^2)} = \frac{F_0}{m\omega^2(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2})} = \frac{F_0}{\frac{k}{\omega^2}\omega^2(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2})} = \frac{F_0}{k} \frac{1}{(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2})} = \mu \delta F_0, \quad (3.26)$$

unde  $\mu$  poartă numele de coeficient dinamic sau factor de amplificare dinamică, se determină cu relația:

$$\mu = \frac{1}{1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}}. \quad (3.27)$$

Cu notațiile de mai sus, expresia deplasării dinamice,  $x(t)$  se determină cu relația:

$$X(t) = \mu F_0 \delta \left( \sin \theta t - \frac{\theta}{\omega} \sin \omega t \right). \quad (3.28)$$

Luând în considerare faptul că vibrațiile proprii se amortizează și fiind caracterizate, după cum rezultă în relația (3.28), prin funcția  $\sin \omega t$ , această relație se simplifică devenind:

$$X(t) = \mu F_0 \delta \sin \theta t. \quad (3.29)$$

### 3.2. Vibrații forțate amortizate

Se consideră un sistem vibrant, alcătuit prin asocierea a trei caracteristici: inerțială, disipativă și elastică, acționat de o forță perturbatoare, figura 3.2.

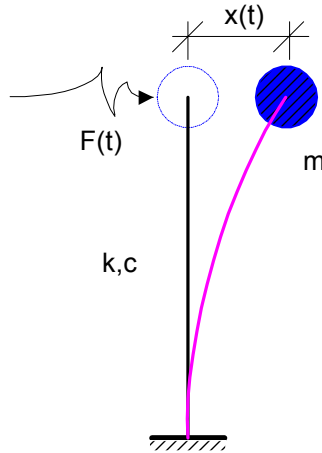


Fig. 3.2. Sistem vibrant complet acționat de o forță armonică

$$F(t) = F_0 \sin \theta t . \quad (3.30)$$

Ecuția mișcării este:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F_0 \sin \theta t \quad (3.31)$$

sau

$$\ddot{x}(t) + \frac{c}{m} \dot{x}(t) + \frac{k}{m} x(t) = \frac{F_0}{m} \sin \theta t \quad (3.32)$$

și

$$\ddot{x}(t) + 2\beta\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \frac{F_0}{m} \sin \theta t . \quad (3.33)$$

Soluția generală a ecuației (3.33) are forma:

$$x(t) = x_L(t) + x_F(t) . \quad (3.34)$$

Soluția vibrațiilor libere este:

$$X_L(t) = e^{-\beta t} (C_1 \sin \omega^* t + C_2 \cos \omega^* t) \quad (3.35)$$

sau

$$x_L(t) = Ae^{-\beta t} \sin(\omega^* t + \varphi^*) . \quad (3.36)$$

Soluția particulară se adoptă de forma:



$$x_F(t) = M \sin \theta t + \cos \theta t, \quad (3.37)$$

Această soluție trebuie să verifice ecuația (3.33) pentru a determina constantele de integrare

$$\begin{aligned} & -M\theta^2 \sin \theta t - N\theta^2 \cos \theta t + 2\beta(M\theta \cos \theta t - N\theta \sin \theta t) + \\ & + M\omega^2 \sin \theta t + N\beta\omega^2 \cos \theta t = \frac{F_0}{m} \sin \theta t \end{aligned} \quad (3.38)$$

sau

$$(M(\omega^2 - \theta^2) - 2N\beta\theta) \sin \theta t + (N(\omega^2 - \theta^2) + 2M\beta\theta) \cos \theta t = \frac{F_0}{m} \sin \theta t. \quad (3.39)$$

Constantele M și N se determină prin identificarea coeficienților funcțiilor trigonometrice din relația (3.39):

$$\begin{cases} M(\omega^2 - \theta^2) - 2N\beta\theta = \frac{F_0}{m} \\ N(\omega^2 - \theta^2) + 2M\beta\theta = 0 \end{cases} \quad (3.40)$$

Constantele de integrare se determină rezolvând sistemul de ecuații (3.40), astfel:

$$N = -\frac{F_0}{m} \frac{2\beta\theta}{(\omega^2 - \theta^2)^2 - 4\beta^2\theta^2}, \quad (3.41)$$

$$M = -\frac{F_0}{m} \frac{\omega^2 - \theta^2}{(\omega^2 - \theta^2)^2 - 4\beta^2\theta^2}. \quad (3.42)$$

Se introduc constantele (3.41) și (3.42) în expresia soluției particulare (3.37) și se obține soluția vibrațiilor forțate:

$$x_F(t) = A_1 \sin(\theta t - \psi_1), \quad (3.43)$$

unde

$$A_1 = \sqrt{N^2 + M^2} \quad (3.44)$$

sau introducând relațiile (3.41) și (3.42), rezultă:

$$A_1 = \delta F_0 \mu^* \quad (3.45)$$

în care

$$\mu^* = \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2})^2 + 4v^2 \frac{\theta^2}{\omega^2}}} \quad (3.46)$$

și

$$\operatorname{tg} \psi_1 = -\frac{N}{M} = \frac{2\nu \frac{\theta}{\omega}}{1 - \frac{\theta}{\omega}}. \quad (3.47)$$

Parametrul  $\mu^*$  poartă numele de factor de amplificare dinamică în care este inclusă și influența amortizării.

Soluția generală are forma:

$$X(t) = e^{-\nu\omega t} (C_1 \sin \omega^* t + C_2 \cos \omega^* t) + \delta F_0 \mu \sin(\theta t - \psi_1). \quad (3.48)$$

Constantele  $C_1$  și  $C_2$  se determină din condiții inițiale:

$$t = 0 \quad \begin{cases} X(0) = x_0 \\ \dot{X}(0) = v_0 \end{cases}. \quad (3.49)$$

Se deduc constantele:

$$C_1 = -M \frac{\theta}{\omega^*} - N \frac{\beta}{\omega^*}, \quad (3.50)$$

$$C_2 = -N. \quad (3.51)$$

### 3.3. Etape de calcul pentru trasarea diagramelor de eforturi maxime și minime în cazul vibrațiilor forțate

În vederea trasării diagramelor de eforturi minime și maxime, pentru modelele dinamice ale unor structuri, se parcurg următoarele etape de calcul:

- a) Se determină rigiditatea sistemului,  $k$   $[\text{Nm}^{-1}]$ ;
- b) Se calculează pulsația proprie de vibrație,  $\omega$ , cu relația:

$$\omega = \frac{k}{m}, \quad [\text{rads}^{-1}];$$

- c) Se determină factorul de amplificare dinamică,  $\mu$ , aplicând relația (3.26) sau (3.46), după cum luăm sau nu în considerare amortizarea în procedura de calcul;
- d) Se încarcă structura dată, sistemul dinamic, cu amplitudinea forței de inerție și amplitudinea forței perturbatoare.

Dacă forța perturbatoare este aplicată în dreptul masei și pe direcția GLD, atunci cele două forțe se însumează formând așa zisa forță dinamică, notată  $F_d(t)$ , deci:

$$F_d(t) = F_i(t) + F(t)$$

sau

$$F_d(t) = -m\ddot{x}(t) + F_0 \sin \theta t, \quad (3.52)$$

iar utilizând relația (3.29), expresia (3.52) devine:

$$F_d(t) = \mu \delta F_0 \theta^2 \sin \theta t + F_0 \sin \theta t \quad (3.53)$$

ori

$$F_d(t) = \mu F_0 \sin \theta t. \quad (3.54)$$

Amplitudinea forței dinamice se calculează cu relația:

$$F_d = \mu F_0, \quad (3.55)$$

în cazul vibrațiilor forțate neamortizate și cu relația:

$$F_d = \mu^* F_0, \quad (3.56)$$

în cazul vibrațiilor forțate amortizate.

Pentru trasarea diagramelor de eforturi minime și maxime, forța dinamică are dublu sens.

### 3.4. Vibrații forțate produse de forțe perturbatoare în alte situații de încărcare

Se vor analiza mai multe situații de încărcare:

- a) Acțiunea unei forțe perturbatoare aplicată pe sistem în altă secțiune decât în cea în care este concentrată masa, figura 3.3.

Pentru aflarea răspunsului în deplasări al sistemului vibrant acționat de o forță perturbatoare armonică în secțiunea k se utilizează relațiile (3.29), în cazul vibrațiilor forțate neamortizate și (3.43) coroborat cu (3.45), în cazul vibrațiilor amortizate. Rezultă expresiile:

$$x_j(t) = \mu \delta_{jk} F_{0,k}(t) \sin \theta t \quad (3.56)$$

și

$$x_j(t) = \mu^* \delta_{jk} F_{0,k}(t) \sin(\theta t - \varphi_1). \quad (3.57)$$

- b) Acțiunea mai multor forțe de aceeași pulsație, de forma

$$F_k(t) = F_{0,k} \sin \theta t \quad (3.58)$$

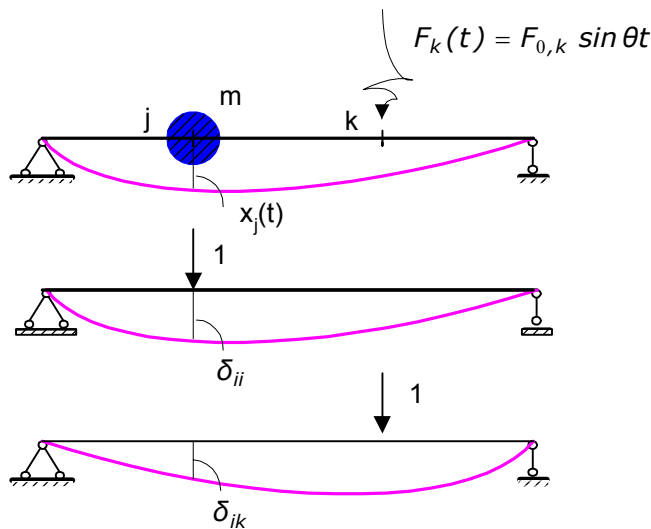


Fig. 3.3. Sistem vibrant încărcat cu o forță perturbatoare

Răspunsul în deplasări se calculează cu expresia (3.29), în cazul vibrațiilor forțate neamortizate, și (3.43) coroborat cu (3.45), în cazul vibrațiilor amortizate. Se deduc relațiile:

$$x_j(t) = \mu \sum_{k=1}^m \delta_{jk} F_{0,k}(t) \sin \theta t \quad (3.59)$$

și

$$x_j(t) = \mu^* \sum_{k=1}^n \delta_{jk} F_{0,k}(t) \sin(\theta t - \varphi_1). \quad (3.60)$$

c) Acțiunea mai multor forțe perturbatoare de pulsații diferite:

$$F_l(t) = F_{0,l} \sin \theta_l t \quad (3.61)$$

$$F_k(t) = F_{0,k} \sin \theta_k t. \quad (3.62)$$

Pentru aflarea răspunsului în deplasări se folosesc relațiile (3.29), (3.43) și (3.45). Se găsesc relațiile:

$$x_j(t) = \mu_l \delta_{jl} F_{0,l}(t) \sin \theta_l t + \mu_k \delta_{jk} F_{0,k}(t) \sin \theta_k t \quad (3.63)$$

și

$$x_j(t) = \sum_{k=1}^n \mu_k \delta_{jk} F_{0,k}(t) \sin \theta_k t \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (3.63)$$

unde

$$\mu_k = \frac{1}{1 - \frac{\theta_k^2}{\omega^2}} \quad (3.64)$$

și

$$\mu_l = \frac{1}{1 - \frac{\theta_l^2}{\omega^2}}, \quad (3.65)$$

referitor la relația (3.62) și

$$\mu_k^* = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\theta_k^2}{\omega^2}\right)^2 + 4\nu^2 \frac{\theta_k^2}{\omega^2}}}, \quad (3.66)$$

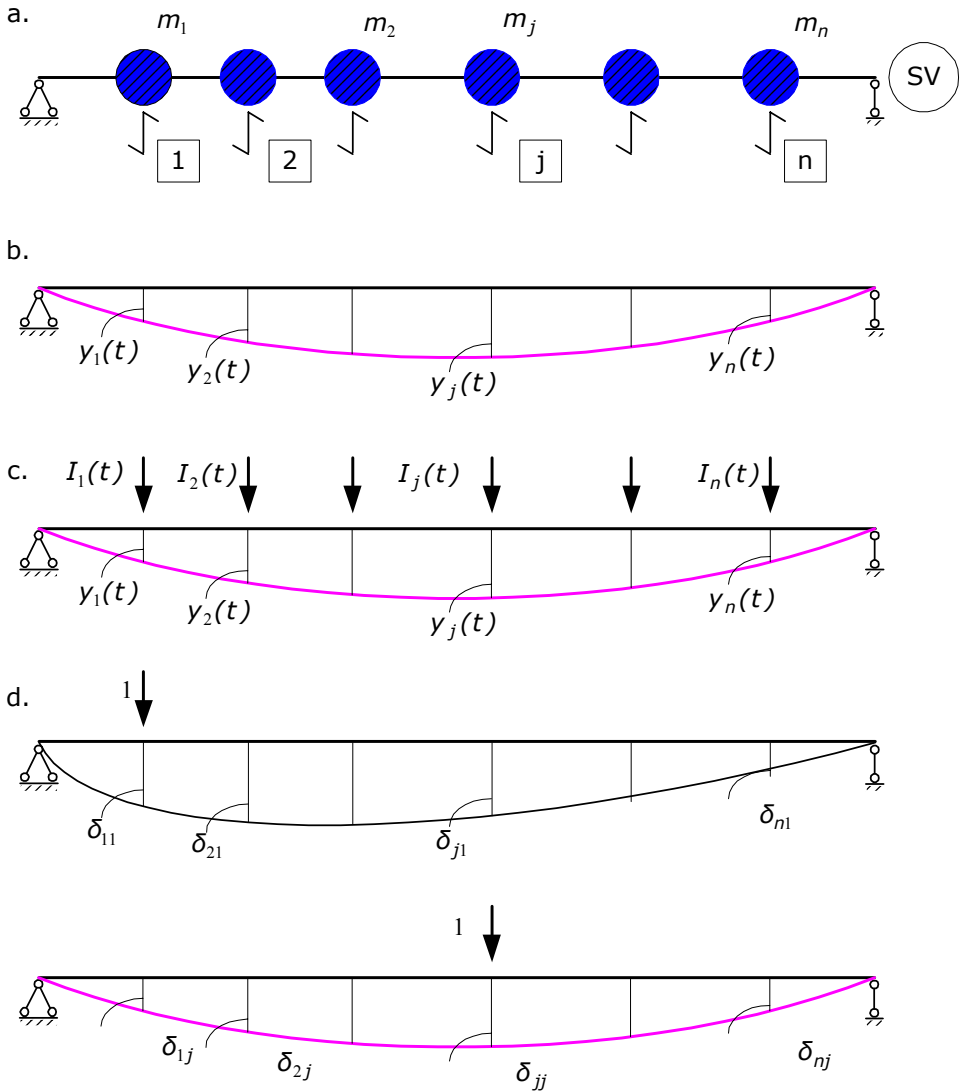
în ceea ce privește expresia (3.63).

# CURSUL 4

## SISTEME VIBRANTE CU nGLD

### **4.1 Vibrații libere. Metoda forțelor de inerție sau metoda matricei de flexibilitate**

Se consideră un sistem vibrant cu nGLD. Sistemul este alcătuit dintr-o grindă simplu rezemată (modelul static) cu n mase concentrate cărora li se acordă nGLD. Deplasările necunoscute fiind deplasările măsurate pe direcția gradelor de libertate dinamică, notate  $y_j(t)$ , figura 4.1.a.

Fig. 4.4. Sistem vibrant cu  $n$  GLD

Sub acțiunea unui impuls inițial (deplasare și viteză) sistemul vibrant va vibra în jurul unei poziții de echilibru static, figura 4.1.b. La momentul  $t$  al mișcării se pot măsura deplasările dinamice instantanee pe direcția gradelor de libertate, de exemplu  $y_j(t)$ , pentru gradul de libertate  $j$ . Pentru toate cele  $n$  deplasări se constituie vectorul deplasărilor dinamice instantanee, vectorul (matricea coloană)  $\{y(t)\}$ :

$$\{y(t)\} = \begin{Bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_j(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{Bmatrix} \quad (4.1)$$

Pe direcția gradelor de libertate iau naștere forțe de inerție, pentru GLD<sub>j</sub>, se notează forța de inerție I<sub>j</sub>(t), iar pentru toate gradele de libertate ale sistemului vibrant se constituie vectorul forțelor de inerție notat {I(t)}:

$$\{I(t)\} = \begin{Bmatrix} I_1(t) \\ I_2(t) \\ \vdots \\ I_j(t) \\ \vdots \\ I_n(t) \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} m_1 \ddot{y}_1(t) \\ m_2 \ddot{y}_2(t) \\ \vdots \\ m_j \ddot{y}_j(t) \\ \vdots \\ m_n \ddot{y}_n(t) \end{Bmatrix} = -[m]\{\ddot{y}(t)\} \quad (4.2)$$

unde: [m] reprezintă matricea diagonală a maselor sau matricea de inerție;

{ $\ddot{y}(t)$ } - vectorul accelerațiilor.

Prin aplicarea pe sistemul vibrant a forțelor de inerție, pe direcția gradelor de libertate dinamică, figura 4.c, se obține deformată dinamică a sistemului dinamic, iar pe direcția GLD se măsoară deplasările y<sub>i</sub>(t). Acest lucru se datorează principiului lui d'Alembert.

Dacă în locul forțelor de inerție, se aplică pe sistem câte o singură forță, egală cu unitatea, pe direcția GLD, în „n” situații de încărcare, corespunzătoare celor nGLD, figura 4.1.d, e..., pe direcțiile gradelor de libertate dinamică se măsoară „n” seturi de câte „n” deplasări unitare, notate: δ<sub>11</sub>, δ<sub>21</sub>, ....., δ<sub>j1</sub>, ....., δ<sub>jj</sub>, ....., δ<sub>nn</sub>. Cu aceste deplasări unitare se constituie o matrice cu „n” linii și „n” coloane, notată [Δ], relația (4.3).

Un element al matricei [Δ], notat δ<sub>jn</sub> reprezintă deplasarea măsurată pe direcția GLD<sub>j</sub>, când sistemul vibrant este acționat pe direcția GLD<sub>n</sub> cu o forță egală cu unitatea.



$$[\Delta] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1j} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2j} & \dots & \delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \dots & \delta_{jj} & \dots & \delta_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nj} & \dots & \delta_{nn} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Prin suprapunerea efectelor, deplasările pe direcțiile gradelor de libertate „1”, „2”, ..., „j” și , respectiv, „n”, se determină cu relațiile:

$$\begin{cases} y_1(t) = \delta_{11}I_1(t) + \delta_{12}I_2(t) + \dots + \delta_{1j}I_j(t) + \dots + \delta_{1n}I_n(t) \\ y_2(t) = \delta_{21}I_1(t) + \delta_{22}I_2(t) + \dots + \delta_{2j}I_j(t) + \dots + \delta_{2n}I_n(t) \\ \vdots \\ y_j(t) = \delta_{j1}I_1(t) + \delta_{j2}I_2(t) + \dots + \delta_{jj}I_j(t) + \dots + \delta_{jn}I_n(t) \\ \vdots \\ y_n(t) = \delta_{n1}I_1(t) + \delta_{n2}I_2(t) + \dots + \delta_{nj}I_j(t) + \dots + \delta_{nn}I_n(t) \end{cases} \quad (4.4)$$

Ecuatiile (4.4) formează un sistem de ecuații care, sub formă matriceală, poate fi scrisă:

$$\{y(t)\} = [\Delta] \{I(t)\} \quad (4.5)$$

Prin introducerea în sistemul (4.5) a vectorului forțelor de inerție, relația (4.2), se obține:

$$[\Delta] [m] \{\ddot{y}(t)\} + \{y(t)\} = \{0\}, \quad (4.6)$$

care reprezintă ecuația matriceală a vibrațiilor libere ale sistemelor vibrante cu nGLD.

Sistemul de ecuații (4.6) este verificat de soluții particulare armonice de forma:

$$y_j(t) = A_j \sin(\omega t + \varphi) \quad (4.7)$$

în care  $A_j$  reprezintă amplitudinea deplasării dinamice, iar pentru toate gradele de libertate dinamice se constituie vectorul deplasărilor:

$$\{y(t)\} = \{A\} \sin(\omega t + \varphi) \quad (4.8)$$

și vectorul vitezelor:

$$\{\ddot{y}(t)\} = -\{A\} \omega^2 \sin(\omega t + \varphi) \quad (4.9)$$

unde  $\{A\}$  este vectorul amplitudinilor deplasărilor dinamice.

Soluțiile particulare (4.8) și (4.9) caracterizează vibrațiile proprii ale sistemului dinamic. Se introduc aceste soluții în sistemul de ecuații (4.6) și se obține:

$$- \{A\} \sin(\omega t + \varphi) + \omega^2 [\Delta][m] \{A\} \sin(\omega t + \varphi) = \{0\} \quad (4.10)$$

sau

$$(\omega^2 [\Delta][m] - [I]) \{A\} = \{0\}, \quad (4.11)$$

care reprezintă ecuația generală a vibrațiilor proprii, unde  $[I]$  este matricea diagonală unitate (toate elementele de pe diagonala principală sunt egale cu unitatea, iar celelalte elemente sunt nule).

Ecuația matriceală (4.11) este algebrică, liniară și omogenă.

Sistemul vibrează atunci când  $A_j \neq 0$ , deoarece soluția banală verifică ecuația (4.11), dar nu este interesantă deoarece corespunde unei poziții de repaus a sistemului.

Pentru ca sistemul de ecuații (4.11) să admită soluții diferite de zero, determinantul principal trebuie să fie nul:

$$|\omega^2 [\Delta][m] - [I]| = 0 \quad (4.12)$$

sau

$$\begin{bmatrix} \omega^2 \delta_{11} m_1 - 1 & \omega^2 \delta_{12} m_2 & \cdot & \omega^2 \delta_{1j} m_j & \cdot & \omega^2 \delta_{1n} m_n \\ \omega^2 \delta_{21} m_1 & \omega^2 \delta_{22} m_2 - 1 & \cdot & \omega^2 \delta_{2j} m_j & \cdot & \omega^2 \delta_{2n} m_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega^2 \delta_{j1} m_1 & \omega^2 \delta_{j2} m_2 & \cdot & \omega^2 \delta_{jj} m_j - 1 & \cdot & \omega^2 \delta_{jn} m_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega^2 \delta_{n1} m_1 & \omega^2 \delta_{n2} m_2 & \cdot & \omega^2 \delta_{nj} m_j & \cdot & \omega^2 \delta_{nn} m_n - 1 \end{bmatrix} = 0 \quad (4.13)$$

Dacă se notează  $\lambda = \frac{1}{\omega^2}$  ecuația (4.13) devine:

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} m_1 - \lambda & \delta_{12} m_2 & \cdot & \delta_{1j} m_j & \cdot & \omega \delta_{1n} m_n \\ \delta_{21} m_1 & \delta_{22} m_2 - \lambda & \cdot & \delta_{2j} m_j & \cdot & \omega \delta_{2n} m_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \delta_{j1} m_1 & \delta_{j2} m_2 & \cdot & \delta_{jj} m_j - \lambda & \cdot & \delta_{jn} m_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \delta_{n1} m_1 & \delta_{n2} m_2 & \cdot & \delta_{nj} m_j & \cdot & \delta_{nn} m_n - \lambda \end{bmatrix} = 0 \quad (4.14)$$

sau prin dezvoltare:

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_k \lambda^{n-k} + \dots + a_n = 0 \quad (4.15)$$

De asemenea, dezvoltând determinantul (4.13) se obține o ecuație de gradul „n” în  $\omega^2$  numită ecuație caracteristică sau ecuația frecvențelor (pulsățiilor) sistemului vibrant.

Rezolvând ecuația caracteristicilor (4.15) se obțin „n” rădăcini reale și pozitive notate:

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_i, \dots, \omega_n$$

reprezentând pulsațiile proprii (naturale) ale sistemului dinamic.

Pulsația proprie cu valoarea cea mai mică, notată prin  $\omega_1$ , se numește pulsație proprie fundamentală, iar celelalte valori, în general notate,  $\omega_i$ , reprezintă pulsațiile proprii de ordin superior:

$$\omega_i > \omega_1, i = 2, 3, \dots, n.$$

Cunoscând cele n pulsații proprii ale sistemului dinamic se determină direct frecvența proprie fundamentală,  $f_1$ , perioada proprie fundamentală,  $T_1$  și celelalte valori proprii de ordin superior, notate generic,  $f_i$  și  $T_i$ .

Prin urmare, valorile proprii sunt caracteristici intrinseci ale sistemelor dinamice deoarece depind exclusiv de proprietățile inerțiale și elastice ale modelelor dinamice.

Fiecărei valori proprii îi corespunde o deformată a sistemului numită formă proprie de vibrație (principală, naturală).

Forma proprie coincide cu deformata sistemului acționată de amplitudinile forțelor de inerție:

$$I_{j,i} = \omega_i^2 m_j y_{j,i} \quad (4.16)$$

sau

$$\{I\}_i = \omega_i^2 [m] \{y\}_i \quad (4.17)$$

unde:  $I_{j,i}$  reprezintă amplitudinea forței de inerție corespunzătoare gradului de libertate  $j$ , în modul  $i$  de vibrație;

$y_{j,i}$  - amplitudinea deplasării măsurată pe direcția GLD în modul  $i$  de vibrație;

$\{y\}_i$  - vectorul (matricea coloană) amplitudinilor, vectorul formei proprii  $i$ .

Ansamblul format dintr-o formă proprie  $\{y\}_i$  și perioada proprie corespunzătoare  $T_i$ , formează un mod propriu de vibrație, în acest caz, modul propriu  $i$  de vibrație.

Configurația geometrică a formelor proprii (vectori proprii) se determină prin introducerea succesivă a valorilor proprii  $\omega_i^2$  în sistemul de ecuații (4.11). Se obține ecuația următoare:

$$(\omega_i^2 [\Delta] [m] - [I]) \{A\}_i = \{0\}, \quad (4.18)$$

numită ecuația generală a vectorilor proprii (dimensionali).

Ecuația  $j$  din sistemul de ecuații (4.18) are forma:

$$\omega_i^2 \delta_{j1} m_1 A_{1,i} + \omega_i^2 \delta_{j2} m_2 A_{2,i} + \dots + (\omega_i^2 \delta_{jj} m_j - 1) A_{j,i} + \dots + \omega_i^2 \delta_{jn} m_n A_{n,i} = 0. \quad (4.19)$$

Se împarte ecuația (4.19) prin  $A_{1,i}$ . Se notează:

$$\frac{A_{1,i}}{A_{1,i}} = 1 = y_{1,i}, \dots, \frac{A_{j,i}}{A_{1,i}} = y_{j,i}, \dots, \frac{A_{n,i}}{A_{1,i}} = y_{n,i} \quad (4.20)$$

Cu aceste notații ecuația (4.19.) devine:

$$\omega_i^2 \delta_{j2} m_2 y_{2,i} + \dots + (\omega_i^2 \delta_{jj} m_j - 1) y_{j,i} + \dots + \omega_i^2 \delta_{jn} m_n y_{n,i} = -\omega_i^2 \delta_{j1} m_1. \quad (4.21)$$

Dacă se împart toate ecuațiile sistemului de ecuații (4.18) prin  $A_{1,i}$ , atunci această sistem, în formă matriceală, devine:

$$(\omega_i^2 [\Delta] [m] - [I]) \{y\}_i = \{0\}, \quad (4.22)$$

care reprezintă ecuația generală a vectorilor proprii adimensionali.

Ecuația matriceală (4.22) are numai „n-1” necunoscute deoarece  $y_{1,i} = 1$  (v. relațiile (4.20)) și pentru aflarea soluției se vor utiliza numai primele „n-1” ecuații, ultima ecuație fiind folosită pentru verificarea rezultatelor.

Se definește matricea spectrală, notată  $[\Omega]$ , ca o matrice diagonală care cuprinde pe diagonala principală pătratele pulsațiilor proprii de vibrație ale unui sistem dinamic cu  $n$  GLD, iar celelalte elemente fiind nule:

$$[\Omega] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & & \\ & \omega_2^2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \omega_i^2 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \omega_n^2 \end{bmatrix}. \quad (4.23)$$

De asemenea, definim matricea modală a unui sistem dinamic cu nGLD, ca o matrice alcătuită prin scrierea pe coloane a formelor proprii de vibrație. Este notată  $[Y]$ :

$$[Y] = \begin{bmatrix} Y_{1,1} & Y_{1,2} & \cdot & Y_{1,i} & \cdot & Y_{1,n} \\ Y_{2,1} & Y_{2,2} & \cdot & Y_{2,i} & \cdot & Y_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Y_{j,1} & Y_{j,2} & \cdot & Y_{j,i} & \cdot & Y_{j,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Y_{n,1} & Y_{n,2} & \cdot & Y_{n,i} & \cdot & Y_{n,n} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

sau

$$[y] = [\{y\}_2 \quad \{y\}_1 \quad \cdot \quad \{y\}_i \quad \cdot \quad \{y\}_n]. \quad (4.25)$$

## 4.2. Aplicație

Se cere să se determine modurile proprii de vibrație pentru un sistem cu două grade de libertate dinamică pentru care se cunosc matricea maselor:

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

și matricea de flexibilitate:

$$[\Delta] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix}.$$

Ecuția generală a vibrațiilor proprii dimensionale, ecuația (4.18) devine:

$$(\omega^2 \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}) \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Ecuția pulsațiilor proprii este:

$$\left| \omega^2 \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0$$

sau:

$$\begin{vmatrix} \omega^2 \delta_{11} m_1 - 1 & \omega^2 \delta_{12} m_2 \\ \omega^2 \delta_{21} m_1 & \omega^2 \delta_{22} m_2 - 1 \end{vmatrix} = 0$$

și

$$\begin{vmatrix} \delta_{11} m_1 - \lambda & \delta_{12} m_2 \\ \delta_{21} m_1 & \delta_{22} m_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

unde

$$\lambda = \frac{1}{\omega^2}.$$

Se dezvoltă determinantul de mai sus și se obține:

$$\lambda^2 - \lambda(\delta_{11} m_1 + \delta_{22} m_2) + m_1 m_2 (\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2) = 0.$$

Se rezolvă ecuația anterioară și se determină valorile proprii:  $\lambda_1$  și  $\lambda_2$ , respectiv (pulsatiile proprii)  $\omega_1^2$  și  $\omega_2^2$ .

După aflarea valorilor proprii se calculează vectorii proprii (forme proprii de vibrație). Aceștia se obțin prin rezolvarea următoarelor două sisteme de ecuații:

○ primul sistem

$$\begin{cases} (\omega_1^2 \delta_{11} m_1 - 1) y_{1,1} + \omega_1^2 \delta_{12} m_2 y_{2,1} = 0 \\ \omega_1^2 \delta_{21} m_1 y_{1,1} + (\omega_1^2 \delta_{22} m_2 - 1) y_{2,1} = 0' \end{cases}$$

pentru  $y_{1,1} = 1$  rezultă din prima ecuație de mai sus:

$$y_{2,1} = - \frac{\omega_1^2 \delta_{11} m_1 - 1}{\omega_1^2 \delta_{12} m_2};$$

○ cel de al doilea sistem:

$$\begin{cases} (\omega_2^2 \delta_{11} m_1 - 1) y_{1,2} + \omega_2^2 \delta_{12} m_2 y_{2,2} = 0 \\ \omega_2^2 \delta_{21} m_1 y_{1,2} + (\omega_2^2 \delta_{22} m_2 - 1) y_{2,2} = 0' \end{cases}$$

pentru  $y_{1,2} = 1$  rezultă din prima ecuație a sistemului anterior:

$$y_{2,2} = - \frac{\omega_2^2 \delta_{11} m_1 - 1}{\omega_2^2 \delta_{12} m_2}.$$

Cele două forme proprii de vibrații sunt:

$$\{y\}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ y_{2,1} \end{Bmatrix} \text{ și } \{y\}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ y_{2,2} \end{Bmatrix}$$

### 4.3. Determinarea matricei de flexibilitate

Matricea de flexibilitate a unei structuri, în coordonatele dinamice ale modelului vibrant, a fost definită în paragraful 4.1, relația (4.3).

Un element al matricei de flexibilitate  $\delta_{jk}$ , conform celor expuse, reprezintă deplasarea produsă de direcția GLDj când după direcția GLDk,

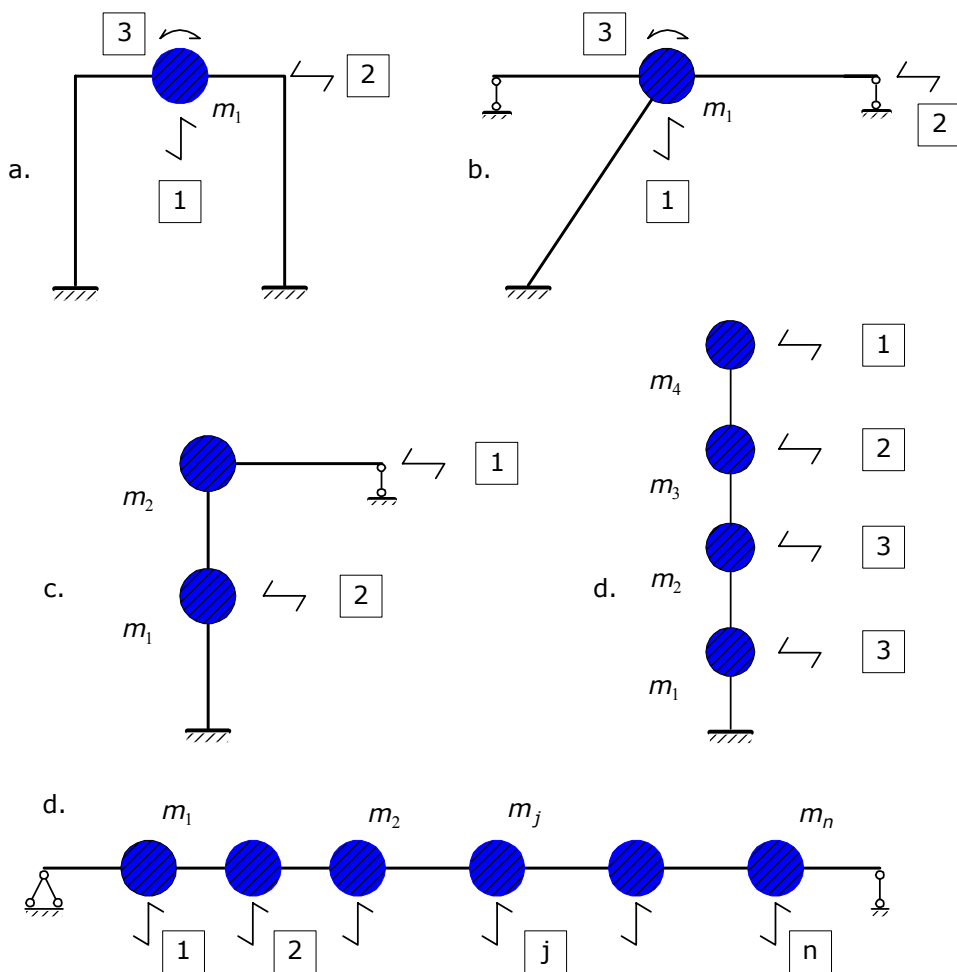


Fig. 4.2. Sisteme dinamice

structura considerată (sistemul vibrant) este acționată de o forță egală cu unitatea.

În figura 4.2 sunt prezentate cinci sisteme dinamice având nominalizate gradele de libertate dinamică acordate, iar în figurile 4.3 și 4.4. situațiile de încărcare, corespunzătoare gradelor de libertate dinamică, în vederea determinării elementelor matricei de flexibilitate.

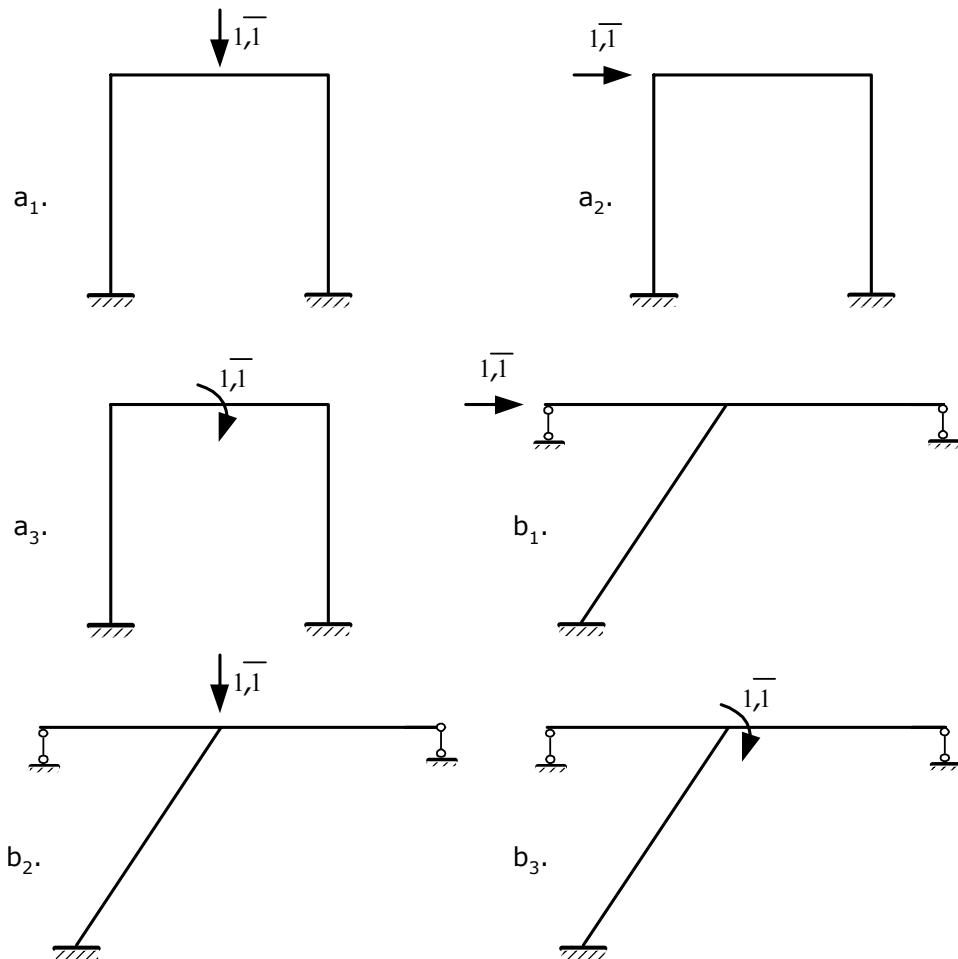


Fig. 4.3. Situații de încărcare pentru calculul matricelor de flexibilitate ale sistemelor din fig.4.2.a. și b.

Pentru calculul elementelor matricei de flexibilitate se utilizează metoda Mohr-Maxwell, materializată prin relația:

$$\delta_{jk} = \sum \frac{\bar{M}_j(x)M_k(x)}{EI}dx, \quad (4.27)$$



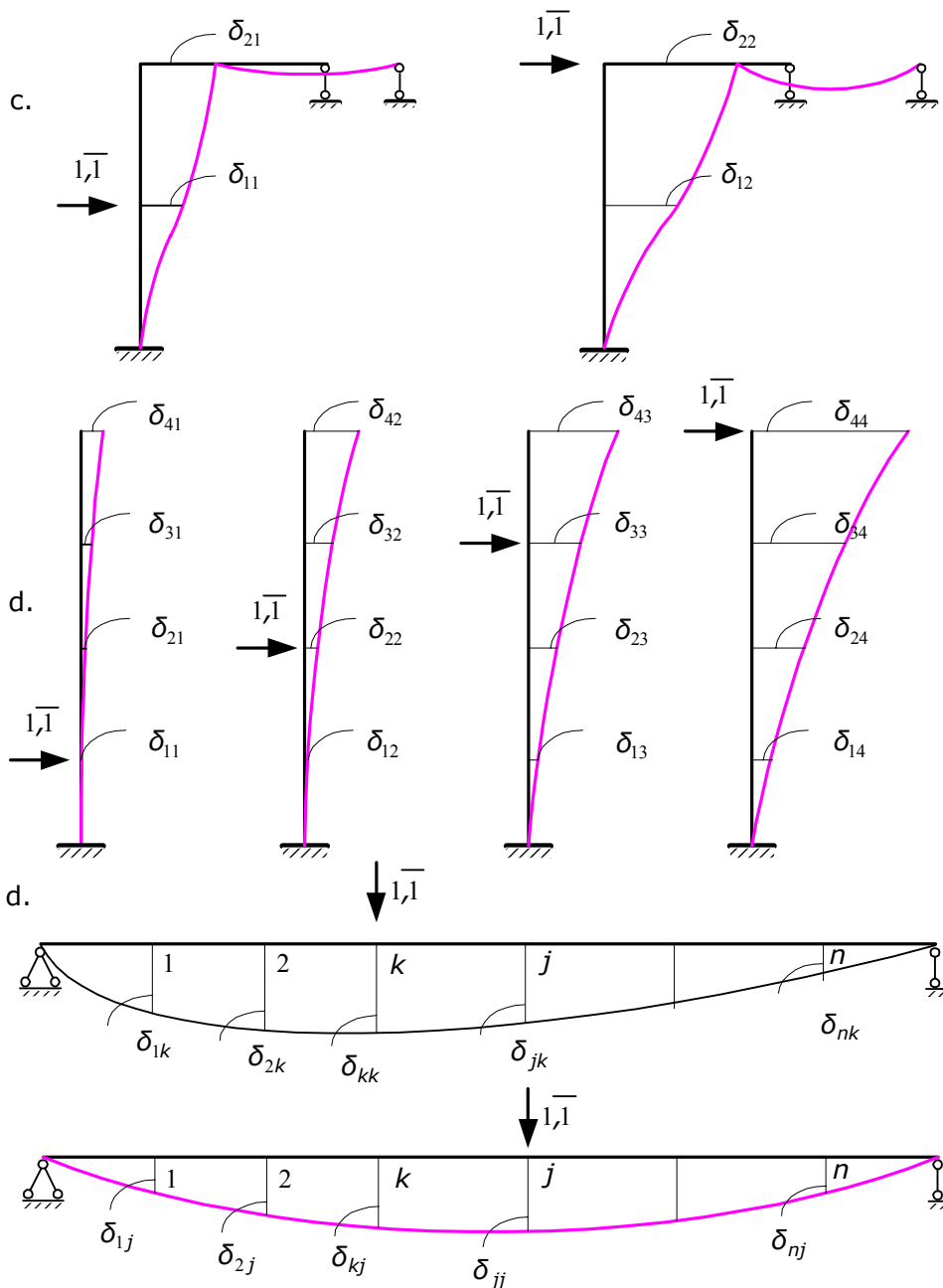


Fig. 4.4. Situații de încărcare pentru calculul matricilor de flexibilitate ale sistemelor din fig.4.2.c.,d.și e

unde:  $\bar{M}_j(x)$  reprezintă momentul încovoietor din secțiunea "x" măsurat în diagrama de moment încovoietor corespunzătoare situației virtuale de încărcare "j" a sistemului vibrant;

$M_k(x)$  - momentul încovoietor din secțiunea "x" măsurat în diagrama de moment încovoietor corespunzătoare situației reale de încărcare "k" a sistemului vibrant.

Obs. În cazul determinării elementului  $\delta_{jk}$  al matricei de flexibilitate, se disting următoarele situații de încărcare:

- situația reală de încărcare, constituită din structura dată (static nedeterminată sau determinată) acționată în dreptul masei  $m_k$ , a sistemului dinamic, și pe direcția GLD<sub>k</sub>, cu o forță egală cu unitatea (notată 1);
- situația virtuală de încărcare, constituită din structura considerată încărcată, în dreptul masei  $m_j$  și pe direcția GLD<sub>j</sub>, cu o forță egală cu unitatea (notată  $\bar{1}$ ).

De asemenea, situația virtuală de încărcare poate fi constituită din orice structură static determinată, obținută din structura dată încărcată, în dreptul  $m_j$  și pe direcție GLD<sub>j</sub>, de o forță egală cu unitatea.

În figura 4.5. sunt reprezentate situațiile de încărcare, virtuale și reale ale sistemului dinamic desenat în figura 4.2.c., sistem cu două grade de libertate dinamică acordate, corespunzător GLD<sub>1</sub> (a se vedea figura 4.4.a).

Diagramele finale de moment încovoietor, în cele două situații de încărcare, reală și virtuală:  $M_f^1$  și  $\bar{M}_f^1$ , care în cazul desfășurării calculelor pe sistemul considerat sunt identice, sunt trasate în figura 4.5.c<sub>3</sub>, folosind metoda forțelor.

Sistemul de bază este desenat în figura 4.5.b, diagrama de moment încovoietor, produsă de încărcarea exterioară (forța egală cu unitatea), este arătată în figura 4.5.c<sub>1</sub> ( $M_p^1$ ), iar diagrama unitară de moment încovoietor este schițată în figura 4.5. c<sub>2</sub> ( $M_1$ ).

Sistemul analizat este o dată static nedeterminat. Ecuație de echilibru elastic, corespunzătoare metodei forțelor, este:

$$\delta_{11}X_1 + X_{1P} = 0,$$

unde coeficientul  $\delta_{11}$  se determină cu relația:

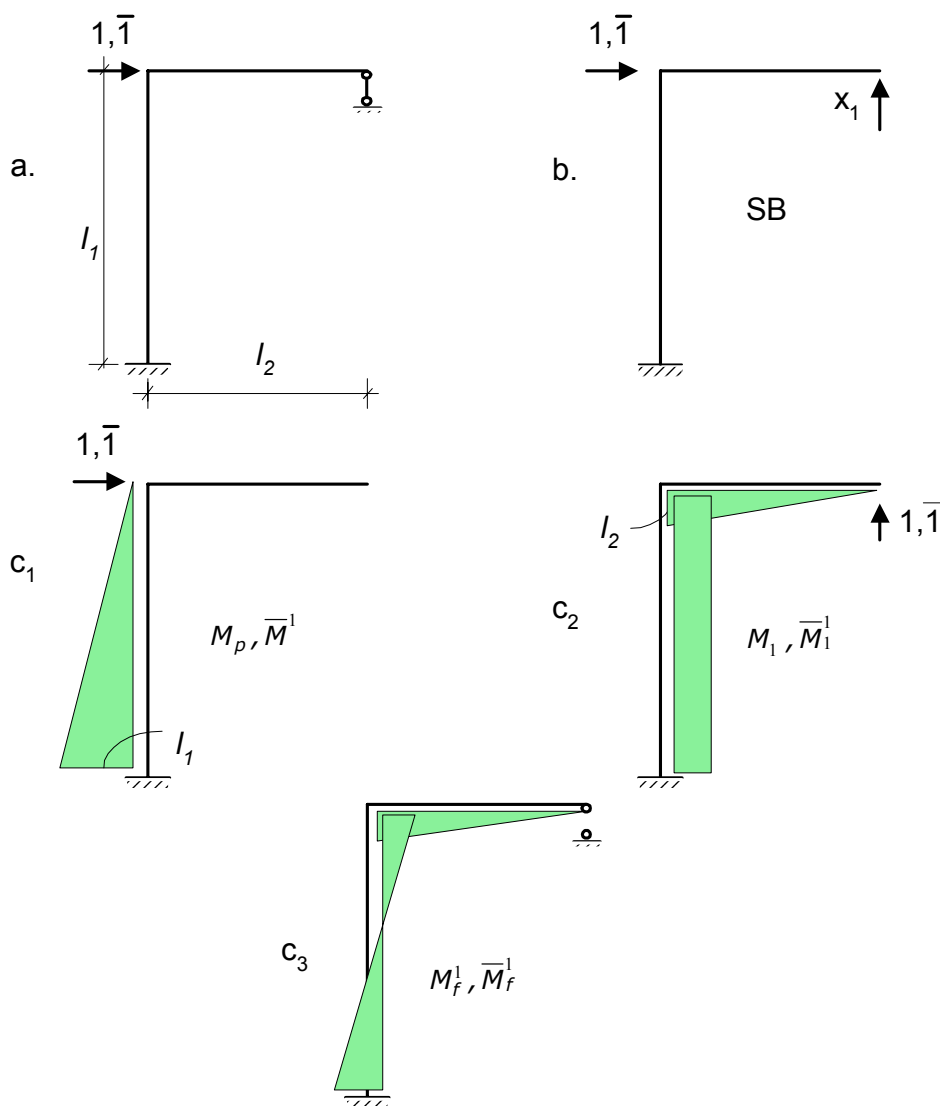


Fig. 4.5. Situații de încărcare și diagrame de moment încovoietor pentru calculul elementelor matricei de flexibilitate

$$\delta_{11} = \sum \frac{\bar{M}_1(x)M_1(x)}{EI}dx,$$

iar termenul liber cu expresia:

$$\Delta_{1P} = \sum \frac{\bar{M}_1(x)M_P^1(x)}{EI}dx.$$

Cele două integrale se rezolvă prin înmulțirea a câte două diagrame, în cazul coeficientului -  $\delta_{11}$ , diagramele de moment încovoietor:  $\bar{M}_1$  și  $M_1$ , figura 4.5.c<sub>2</sub> și diagramele:  $\bar{M}_1$  și  $M_p^1$ , figurile 4.5.c<sub>1</sub> și c<sub>2</sub>, în cazul termenului liber.

După rezolvarea ecuației de echilibru și aflarea soluției  $X_1$  se trasează diagrama finală de moment încovoietor  $M_f^1$  identică, în acest caz, cu cea virtuală  $\bar{M}_f^1$ , calculată pentru sistemul considerat.

Elementul principal al matricei de flexibilitate, notat  $\delta_{11}$  se determină cu relația:

$$\delta_{11} = \sum \frac{\bar{M}_f^1(x)M_f^1(x)}{EI}dx$$

sau

$$\delta_{11} = \sum \frac{\bar{M}_f^1(x)\bar{M}^1(x)}{EI}dx,$$

dacă se utilizează diagrama de moment încovoietor  $\bar{M}^1$  obținută prin soluționarea unei situații virtuale de încărcare constituite din sistemul de bază (structură static determinată) acționată în dreptul masei și pe direcția  $GLD_1$  a unei forțe virtuale eală cu unitatea (notată  $\bar{1}$ ).

# CURSUL 5

## SISTEME VIBRANTE CU nGLD

### 5.1. Vibrații libere ale sistemelor cu nGLD. Metoda matricei de rigiditate

Se consideră un sistem cu nGLD. Sub acțiunea unui impuls inițial (viteză și deplasare) sistemul va vibra în raport cu poziția de echilibru static, figura 5.1.

La momentul  $t$  al vibrației pe direcția gradelor de libertate dinamică se măsoară deplasările  $y_j(t), t = \overline{1, n}$ , figura 5.1.b, care alcătuiesc vectorul (matricea coloană)  $\{y(t)\}$ .

$$\{y(t)\} = \begin{Bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_j(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{Bmatrix}. \quad (5.1)$$

Pentru a folosi, în analiza dinamică a sistemelor, metoda matricei de rigiditate se vor bloca toate deplasările pe direcțiile GLD, obținând sistemul de bază dinamic. Împiedicarea deplasărilor se realizează cu ajutorul blocajelor simple: reazeme simplu rezemate, pentru deplasări liniare și blocaje de nod, pentru deplasările unghiulare.

În vederea aplicării principiului lui d'Alembert se va acționa, succesiv, sistemul de bază dinamic, cu deplasările:  $y_1(t), \dots, y_j(t), \dots, y_n(t)$ , aplicate pe direcțiile GLD sub formă de cedări de reazem. În figura 5.1.d este desenată deformată sistemului vibrant corespunzătoare cedării de reazem,  $y_j(t)$ . În fiecare blocaj iau naștere reacțiunile:  $R_1(t), \dots, R_j(t), \dots, R_n(t)$ , iar în blocajul corespunzător GLD<sub>j</sub> ia naștere și forța de inerție, datorită deplasării masei  $m_j$ , notată  $I_j(t)$ .

Se constituie vectorul forțelor de inerție  $\{I_j(t)\}$ :

$$\{I(t)\} = \begin{Bmatrix} I_1(t) \\ I_2(t) \\ \vdots \\ I_j(t) \\ \vdots \\ I_n(t) \end{Bmatrix} = -[m]\{\ddot{y}(t)\}. \quad (5.2)$$

Cum însă, blocajele care au fost introduse pentru a împiedica deplasările pe direcțiile GLD, nu există în realitate pe sistemul vibrant, rezultă că suma forțelor de inerție și a reacțiunilor din blocajele GLD, corespunzătoare celor „n” deformatate ce se pot realiza, de tipul celei din figura 5.1.d, trebuie să fie nulă și obținem, astfel, „n” ecuații, câte una pentru fiecare grad de libertate.

De exemplu, pentru gradul de libertate „j” se obține ecuația:

$$-I_j(t) + R_{j,1}(t) + R_{j,2}(t) + \dots + R_{j,j}(t) + \dots + R_{j,n}(t) = 0. \quad (5.3)$$

Cele „n” ecuații, de tipul celei de mai sus, constituie ecuațiile de echilibru dinamic ale sistemului vibrant și alcătuiesc un sistem de ecuații cu „n” ecuații și „n” necunoscute.

Comparând deformata din figura 1.d cu cea din figura 5.1.f rezultă:

$$R_{j,j}(t) = K_{jj}y_j(t). \quad (5.4)$$

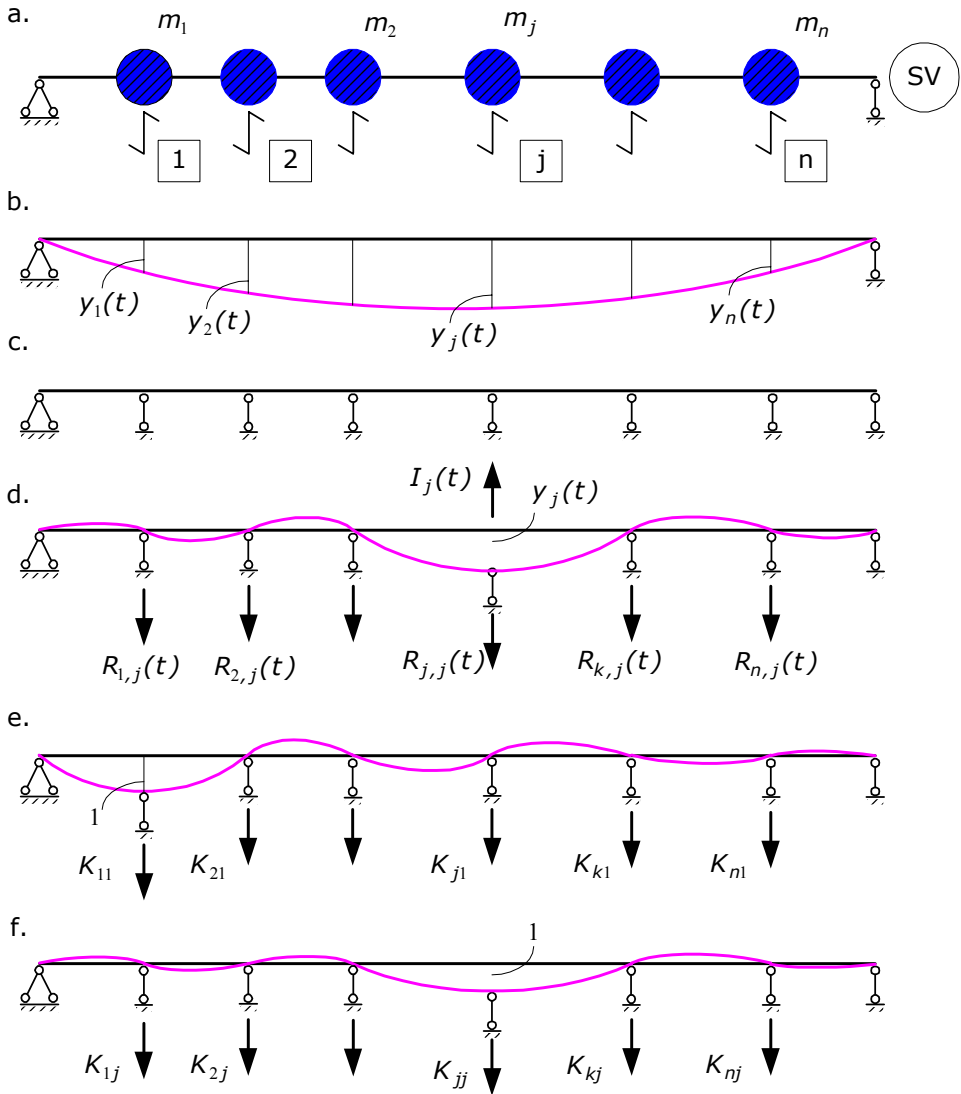


Fig. 5.1. Sistem vibrant cu nGLD

De asemenea, se pot scrie, și pentru celelalte deformatate, expresiile:

$$R_{j,1}(t) = K_{j1}y_1(t), R_{j,2}(t) = K_{j2}y_2(t), \dots, R_{j,n}(t) = K_{jn}y_n(t). \quad (5.5)$$

Introducem relațiile (5.4) și (5.5) în ecuația (5.3) și se ajunge la următoarea ecuație:

$$-I_j(t) + K_{j1}y_1(t) + K_{j2}y_2(t) + \dots + K_{jj}y_j(t) + \dots + K_{jn}y_n(t) = 0, \quad (5.6)$$

iar pentru celelalte „n” deformat de tipul celei din fig.5.1.d., deci prin producerea de cedări de reazeme pe direcția fiecărui GLD, în blocajele simple de GLD, va rezulta un sistem de ecuații care, scris sub formă matriceală, arată astfel:

$$-\{I(t)\} + [K]\{y(t)\} = \{0\}, \quad (5.7)$$

unde  $[K]$  reprezintă matricea de rigiditate a sistemului vibrant determinată în coordonatele dinamice ale sistemului,

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdot & K_{1j} & \cdot & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \cdot & K_{2j} & \cdot & K_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K_{j1} & K_{j2} & \cdot & K_{jj} & \cdot & K_{jn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K_{n1} & K_{n2} & \cdot & K_{jn} & \cdot & K_{nn} \end{bmatrix}. \quad (5.8)$$

Un element al matricei de rigiditate  $[K]$ ,  $K_{jj}$  are semnificația unei forțe, care aplicată pe sistemul vibrant în dreptul masei  $m_j$ , produce pe direcția GLD<sub>j</sub> o deplasare egală cu unitatea, în timp ce toate celelalte deplasări, de pe direcția GLD, sunt blocate de forțele  $K_{rj}$ ,  $r = \overline{1, n}$ .

Elementele matrice de rigiditate pot fi definite și ca reacțiuni. Astfel,  $K_{jj}$  reprezintă reacțiunea din blocajul GLD<sub>j</sub> când în acest blocaj se produce o cedare de reazem egală cu unitatea, iar în celelalte blocaje ale sistemului de bază dinamic, figura 5.1.c, iau naștere reacțiunile  $K_{rj}$ ,  $r = \overline{1, n}$ .

Substituind expresia matriceală a forțelor de inerție, relația (5.2), în ecuația (5.7), obținem:

$$[m]\{\ddot{y}(t)\} + [K]\{y(t)\} = \{0\}. \quad (5.9)$$

Ecuația (5.9) reprezintă *ecuația generală a vibrațiilor libere* ale sistemelor vibrante cu nGLD. Sistemul este verificat de soluțiile particulare:

$$\{y(t)\} = \{A\}\sin(\omega t + \varphi). \quad (5.10)$$

Introducem soluția (5.10) în ecuația matriceală (5.9), care devine:



$$([K] - \omega^2 [m])\{A\} = \{0\}, \quad (5.11)$$

după ce am împărțit ecuația (matriceală) prin  $\sin(\omega t + \varphi)$ . Ecuația (5.11) este numită ecuația generală a vibrațiilor proprii.

Pentru ca sistemul de ecuații (5.11) să admită soluții diferite de zero, determinantul principal trebuie să se anuleze:

$$|[K] - \omega^2 [m]| = 0. \quad (5.12)$$

Prin dezvoltarea determinantului (5.12) rezultă o *ecuație caracteristică*, numită și *ecuația pulsațiilor proprii*. Rezolvând această ecuație rezultă cele „n” pulsații proprii:  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_i, \dots, \omega_n$ , iar cu patratele acestor valori se constituie matricea spectrală a sistemului vibrant:

$$[\Omega] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & \\ & \omega_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega_i^2 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \omega_n^2 \end{bmatrix}. \quad (5.13)$$

Pentru aflarea vectorilor proprii de vibrație ai sistemului vibrant se rezolvă *ecuația vectorilor proprii*, care are alura următoare:

$$([K] - \omega_i^2 [m])\{y\}_i = \{0\}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (5.14)$$

Rezolvând cele „n” sisteme de ecuații, obținute prin variația indicelui „i”, se obțin cei „n” vectori proprii adimensionali  $\{y\}_i$ , cu ajutorul cărora se constituie matricea modală a sistemului vibrant:

$$[Y] = [\{y\}_1 \quad \{y\}_2 \quad \dots \quad \{y\}_i \quad \dots \quad \{y\}_n]. \quad (5.15)$$

## 5.2. Aplicație – sistem vibrant cu 2GLD

Vom considera un sistem vibrant cu două mase:  $m_1$  și  $m_2$ , cărora li se acordă câte un grad de libertate dinamică. Se propune determinarea modurilor proprii de vibrație: pulsațiile proprii  $\omega_1$  și  $\omega_2$  și formele proprii de vibrație  $\{y\}_1$  și  $\{y\}_2$ . Pentru aceasta, sunt parcurse următoarele etape de calcul:

- a. Se constituie matricea maselor:

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & \\ & m_2 \end{bmatrix}.$$

- b. Se determină matricea de rigiditate a sistemului vibrant în coordonatele dinamice ale acestuia:

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}.$$

- c. Se scrie și se rezolvă ecuația pulsațiilor proprii:

$$\left[ \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_1 & \\ & m_2 \end{bmatrix} \right] = 0$$

sau

$$\left[ \begin{bmatrix} K_{11} - \omega^2 m_1 & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} - \omega^2 m_2 \end{bmatrix} \right] = 0$$

și

$$m_1 m_2 - \lambda (m_2 K_{11} + m_1 K_{22}) + \lambda^2 (K_{11} K_{22} - K_{12}^2) = 0$$

dacă

$$\lambda = \frac{1}{\omega^2}$$

sau

$$\omega^4 m_1 m_2 - \omega^2 (m_2 K_{11} + m_1 K_{22}) + (K_{11} K_{22} - K_{12}^2) = 0.$$

În final:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{m_1 K_{22} + m_2 K_{11} \pm \sqrt{(m_1 K_{22} + m_2 K_{11})^2 - 4 m_1 m_2 (K_{11} K_{22} - K_{12}^2)}}{2 m_1 m_2}.$$

- d. Formele proprii de vibrații se calculează prin rezolvarea următoarelor două sisteme de ecuații:

$$([K] - \omega_1^2 [m]) \{y\}_1 = \{0\}$$

$$([K] - \omega_2^2 [m]) \{y\}_2 = \{0\}$$

unde:

$$\{y\}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ y_{2,1} \end{Bmatrix} \quad \text{și} \quad \{y\}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ y_{2,2} \end{Bmatrix}.$$

Fiecare dintre sistemele de mai sus cuprind câte două ecuații, dar cum  $y_{1,1} = 1$  și  $y_{1,2} = 1$ , atunci, din prima ecuație a fiecărui sistem de ecuații se obține ordonata  $y_{2,1}$ , respectiv  $y_{2,2}$ , iar cea de a doua ecuație, a fiecărui sistem, este utilizată pentru verificarea ordonate calculate.

### 5.3. Proprietatea de ortogonalitate a formelor proprii de vibrație

Pentru a demonstra proprietatea de ortogonalitate a formelor proprii de vibrație se pleacă de la ecuația formelor proprii (5.14), scrisă sub forma:

$$([K] \{y\}_i = \omega_i^2 [m] \{y\}_i. \quad (5.16)$$

Se multiplică la stânga, ecuația (5.16), cu o altă formă proprie de vibrație transpusă, de exemplu  $\{y\}_r^T$ , rezultă:

$$\{y\}_r^T ([K] \{y\}_i = \omega_i^2 \{y\}_r^T [m] \{y\}_i. \quad (5.17)$$

Se transpune ecuația (5.16) și se rescrie pentru modul „r” de vibrație, se obține:

$$\{y\}_r^T ([K] = \omega_r^2 \{y\}_r^T [m], \quad (5.18)$$

deoarece:  $[K]^T = [K]$  și  $[m]^T = [m]$ .

Expresia (5.18) se postmultiplică cu forma proprie de vibrație corespunzătoare modului „i” de vibrație:

$$\{y\}_r^T ([K] \{y\}_i = \omega_r^2 \{y\}_r^T [m] \{y\}_i. \quad (5.19)$$

Se scade relația (5.18) din (5.16), rezultă:

$$0 = (\omega_i^2 - \omega_r^2) \{y\}_r^T [m] \{y\}_i. \quad (5.20)$$

Dar, cum  $\omega_i^2 \neq \omega_r^2$ , sunt două pulsații proprii diferite ale sistemului vibrant, se ajunge la concluzia că produsul celor doi vectori proprii satisface relația:

$$\{y\}_r^T [m] \{y\}_i = 0, \quad (5.21)$$

care va reprezenta *proprietatea de ortogonalitate* a două forme proprii de vibrație:  $\{y\}_i$  și  $\{y\}_r$ .

De asemenea, se pot demonstra și expresiile:

$$\{y\}_r^T [C] \{y\}_i = 0, \quad (5.22)$$

$$\{y\}_r^T [\Delta] \{y\}_i = 0 \quad (5.23)$$

și

$$\{y\}_r^T [K] \{y\}_i = 0. \quad (5.24)$$

unde:  $[C]$  reprezintă matricea de amortizare a sistemului vibrant  
și  $[\Delta]$  - matricea de flexibilitate a sistemului vibrant.

#### 5.4. Normalizarea formelor proprii de vibrație

Ordonatele formelor (vectorilor) proprii de vibrație nu sunt diferite în sens absolut. Când unei ordonate a unui vector propriu  $i$  se atribuie o anumită valoare, atunci se pot preciza și celelalte elemente (ordonate), deoarece numai raportul dintre oricare două ordonate sunt constante și cunoscute. Numai în cazul în care unul dintre elementele vectorului propriu este cunoscut, vectorul propriu devine unic în sens absolut. Acest proces de ajustare a elementelor unui mod natural, pentru a obține o amplitudine unică, se numește *normalizare*.

Se observă că dacă  $i=r$ , în expresia (5.21) produsul matriceal este egal cu un scalar constant, diferit de zero, pe care îl vom numi termen inerțial sau masă inerțială:

$$\{y\}_r^T [m] \{y\}_r = M_r, \quad r = \overline{1, n}. \quad (5.25)$$

Aplicând același raționament asupra relației (5.24) se obține:

$$\{y\}_r^T [K] \{y\}_r = \omega_r^2 M_r = K_r, \quad (5.26)$$

unde  $K_r$  reprezintă rigiditatea generalizată a sistemului vibrant.

Se cunosc următoarele modalități de normalizare a unui vector propriu:

- a. atribuirea unei valori egale cu unitatea masei generalizate în relația (5.25):

$$\{\bar{y}\}_r^T [m] \{\bar{y}\}_r = 1, \quad (5.27)$$

unde  $\{\bar{y}\}_r$  reprezintă vectorul propriu normalizat, se calculează cu relația:

$$\{\bar{y}\}_r = \frac{1}{\sqrt{M_r}} \{y\}_r; \quad (5.28)$$

- b. normalizarea unui vector propriu prin acordarea valorii proprii unitate celui mai mare termen al unui vector;
- c. normalizarea prin atribuirea valorii unitate lungimii vectorului modal.

Dacă folosim matricea modală,  $[\bar{Y}]$  :

$$[\bar{Y}] = \begin{bmatrix} \{\bar{y}\}_1 & \{\bar{y}\}_2 & \dots & \{\bar{y}\}_i & \dots & \{\bar{y}\}_{n1} \end{bmatrix}, \quad (5.29)$$

atunci se pot scrie relațiile:

$$[\bar{Y}]^T [m] [\bar{Y}] = [I], \quad (5.30)$$

$$[\bar{Y}]^T [K] [\bar{Y}] = [\Omega] \quad (5.31)$$

și

$$[\bar{Y}]^T [C] [\bar{Y}] = [2v\omega]. \quad (5.32)$$

### 5.5. Proprietățile pulsațiilor proprii

Se definește matricea dinamică, notată  $[D]$ , prin intermediul produsului matriceal dintre matricea de flexibilitatea a sistemului vibrant și matricea de inerție:

$$[D] = [\Delta] [m]. \quad (5.33)$$

Determinantul și urma matricei dinamice sunt egale cu determinantul și urma inversei matricei spectrale  $[\Omega]$  :

$$\det([D]) = \det([\Omega]^{-1}), \quad (5.35)$$

$$u([D]) = u([\Omega]^{-1}). \quad (5.36)$$

Inversa matricei dinamice se calculează cu relația

$$[D]^{-1} = [m]^{-1} [\Delta]^{-1} = [m]^{-1} [K], \quad (5.37)$$

deoarece

$$[\Delta][K] = [I]. \quad (5.38)$$

Determinantul și urma inversei matricei dinamice sunt egale cu determinantul și urma matricei spectrale:

$$\det([D]^{-1}) = \det([m]^{-1} [K]) = \det([\Omega]), \quad (5.39)$$

$$u([D]^{-1}) = u([m]^{-1} [K]) = u([\Omega]). \quad (5.40)$$

### 5.6. Determinarea matricei de rigiditate a sistemului vibrant

În vederea determinării elementele matricei de rigiditate, inclusă în relația (5.7), vom considera o structură static nedeterminată, figura 5.2.a și vom utiliza mai multe procedee de calcul. Pentru început, se vor

bloca deplasările pe direcțiile gradelor de libertate dinamică, figura 5.2.b, iar situațiile de încărcare sunt prezentate în figura 5.2.c și d.

În cazul structurii considerate, matricea de rigiditate are forma:

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}. \quad (5.41)$$

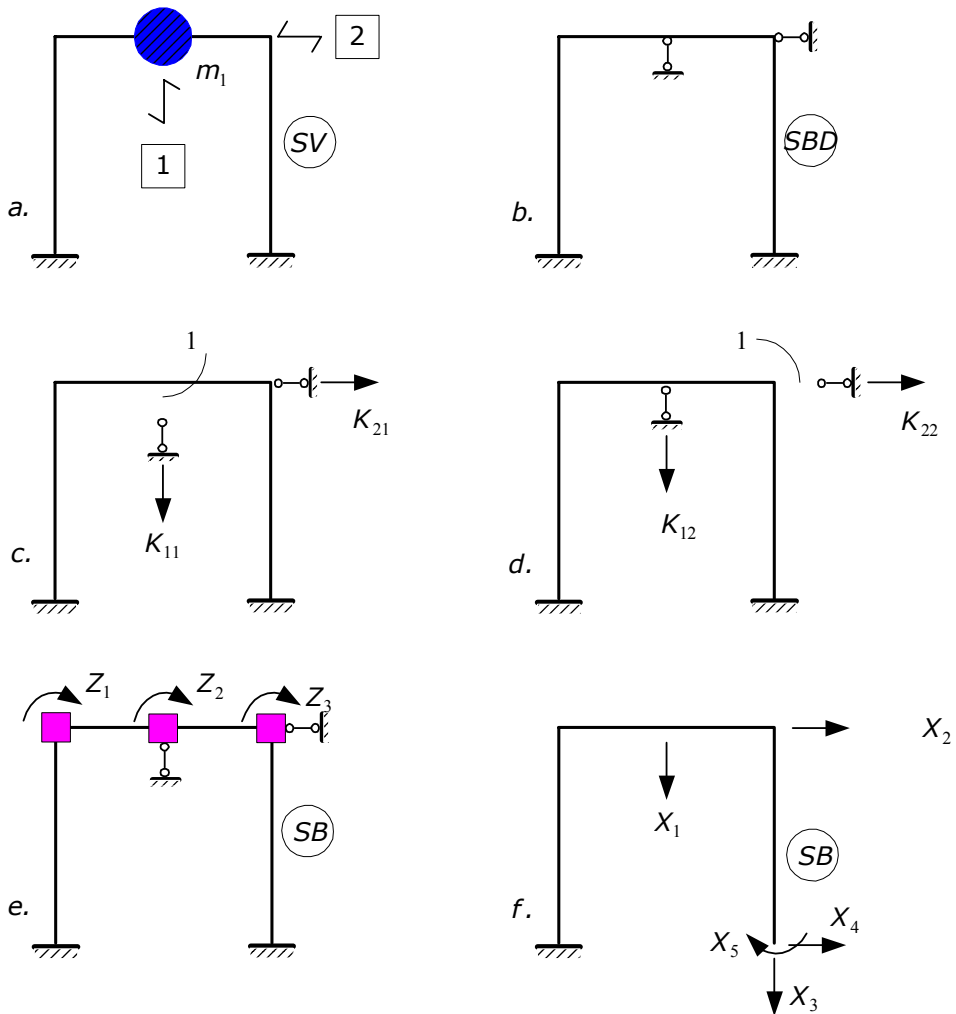


Fig. 5.2. Calculul elementelor matricei de rigiditate: a. sistem vibrant; b. sistem de bază dinamic; c. și d. situații de încărcare; e. sistem de bază în metoda deplasărilor; f. sistem de bază în metoda forțelor

### 5.6.1. Folosirea metodei forțelor

Primul procedeu pentru determinarea elementelor matricei de rigiditate constă în aplicarea metodei forțelor în cazul celor două situații de încărcare, figura 5.2.c și d.

Datorită introducerii celor două blocaje pe direcțiile GLD, structura care era de trei ori static nedeterminată, a devenit de cinci ori static nedeterminată.

Se alege un sistem de bază static determinat prin suprimarea a cinci legături (interioare și/sau exterioare). Este indicat ca primele necunoscute nominalizate să fie cele corespunzătoare suprimării legăturilor suplimentare, introduse după direcțiile GLD, după care se suprimă și celelate legături, până când sistemul vibrant devine static determinat, figura 5.2.f.

Ecuția de echilibru matriceală are forma:

$$[\delta_{ij}] \{x_j^r\} = \{\Delta_{ic}^r\}; \quad r = 1, 2, \quad (5.42)$$

unde:  $[\delta_{ij}]$  reprezintă matricea coeficienților, un coeficient se determină cu relația:

$$\delta_{ij} = \sum \frac{\bar{M}_i(x) M_j(x)}{EI} dx; \quad (5.43)$$

$x_j^r$  reprezintă necunoscuta introdusă pe direcția legăturii suprimate „j”, pentru a transforma sistemul vibrant, din forma sistemului de bază dinamic, într-un sistem de bază, corespunzător metodei forțelor;

r - o situație de încărcare corespunzătoare GLD;

$\{\Delta_{ic}^r\}$  - vectorul termenilor liberi, un element al acestui vector se calculează cu expresia:

$$\Delta_{ic}^r = \pm 1 \cdot \Delta_i \pm \sum R_k^i \Delta_k; \quad (5.44)$$

$\Delta_i$  - cedarea de reazem produsă pe direcția reazemului „i”;

$R_k^i$  - reacțiunea din blocajul „k” al sistemului de bază, când acesta este încărcat de o forță egală cu unitatea, aplicată pe direcția legăturii suprimate „i”;

$\Delta_k$  - cedarea de reazem produsă pe direcția reazemului „k”.

Prin rezolvarea celor două sisteme de ecuații (5.42) se obțin cele patru elemente ale matricei de rigiditate:

$$x_1^1 = K_{11} \text{ și } x_2^1 = K_{21}, \quad (5.45)$$

respectiv:

$$x_1^2 = K_{12} \text{ și } x_2^2 = K_{22}. \quad (5.46)$$

### 5.6.2. Folosirea metodei deplasărilor

Un al doilea procedeu, pentru determinarea elementelor matricei de rigiditate, constă în aplicarea metodei deplasărilor, în cazul celor două situații de încărcare desenate în figura 2.c și d. Sistemul de bază este arătat în figura 2.e.

Analizând sistemul de bază dinamic, figura 2.b, obținut din sistemul vibrant la care s-au blocat deplasările pe direcțiile GLD, constatăm că acesta este un cadru cu noduri fixe. Sistemul de bază corespunzător metodei deplasărilor, prezentat în figura 2.e, are nodurile blocate.

Ecuția de echilibru, în formă matriceală, este:

$$[r_{ij}] \{z_j^r\} + \{R_{ip}^r\} = \{0\}; \quad r = 1, 2, \quad (5.47)$$

în care:  $[r_{ij}]$  reprezintă matricea coeficienților, matricea de rigiditate dedusă în coordonatele statice ale sistemului;

$\{z_j^r\}$  - vectorul necunoscutelor, deplasările unghiulare ale nodurilor;

$\{R_{ip}^r\}$  - vectorul termenilor liberi; termenii liberi sunt produși de cedările de reazem, în cele două situații de încărcare,

$r$  - situații de încărcare.

Pentru calculul termenilor liberi se produc, pe sistemul de bază, în cazul structurii propuse în studiu, figura 5.3, cedări de reazem. Cele două situații de încărcare sunt prezentate în figura 5.b și c, iar pentru calculul coeficienților, de exemplu în cazul primei necunoscute,  $z_1$ , deformata sistemului de bază, figura 3.a, este desenată în figura 3.d.

După ce se calculează coeficienții și termenii liberi, se rezolvă cele două sisteme de ecuații de echilibru static. Cu necunoscutele determinate se trasează diagramele de eforturi, momente încovoietoare. Aplicând, apoi, principiul lucrului mecanic virtual se calculează, pentru momentele încovoietoare determinate anterior, reacțiunile din reazemele simple introduse pe direcțiile GLD. Aceste reacțiuni sunt identice cu elementele matricei de rigiditate, pe care ne-am propus să o determinăm.



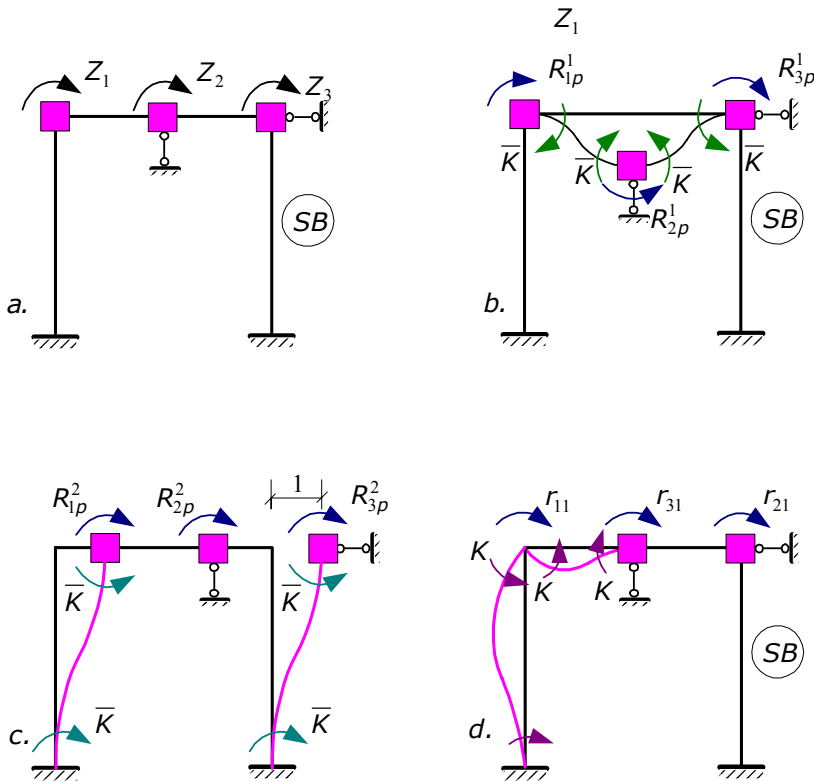


Fig. 5.3. Calculul elementelor matricei de rigiditate: a. sistem de bază; b. deformata sistemului de bază pentru prima situație de încărcare, cedare de reazem pe direcția GLD<sub>1</sub>; c. deformata sistemului de bază pentru a doua situație de încărcare, cedare de reazem pe direcția GLD<sub>2</sub>; d. deformata sistemului de bază pentru acțiunea  $Z_1=1$ , în vederea calculului coeficienților

### 5.6.3. Condensarea matricei de rigiditate

Un al treilea procedeu, pentru a găsi matricea de rigiditate în coordonatele dinamice ale sistemului vibrant, constă în condensarea matricei de rigiditate determinată corespunzător coordonatelor statice ale sistemului vibrant, deci a matricei coeficienților din metoda deplasărilor.

Sistemul vibrant este arătat în figura 4.a, iar sistemul de bază corespunzător metodei deplasărilor în figura 4.b.

Pentru demonstrație, se pleacă de la ecuația generală de echilibru static, din metoda deplasărilor:

$$[r_{ij}] \{z_j\} = \{p\} \quad (5.48)$$

sau

$$[r_{ij}] \begin{Bmatrix} \{X\} \\ \{Y\} \\ \{\theta\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{p_x\} \\ \{p_y\} \\ \{M\} \end{Bmatrix} , \quad (5.49)$$

unde:  $\{X\}$  reprezintă vectorul necunoscutelor deplasări liniare ale nodurilor structurii pe direcția axei OX;

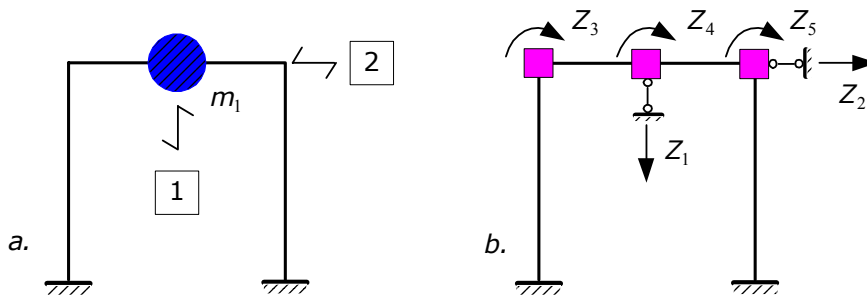


Fig. 5.4. Calculul elementelor matricei de rigiditate: a. sistem vibrant (dinamic); b. sistem de bază în metoda deplasărilor

$\begin{Bmatrix} Y \\ \theta \end{Bmatrix}$  - vectorul necunoscutelor: deplasări liniare pe direcția axei

OY și deplasări unghiulare în raport cu axa OZ, ale nodurilor structurii;

$[P]$  - vectorul termenilor liberi, în cazul forțelor exterioare aplicate în noduri. Elementele fiind acțiuni, vectorul termenilor liberi este scris, în ecuațiile de condiție, în dreapta semnelui de egalitate,.

Dacă partiționăm corespunzător și matricea coeficienților, în relația (5.49), aceasta devine:

$$\begin{bmatrix} [r_{11}] & [r_{12}] \\ [r_{21}] & [r_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{X\} \\ \{Y\} \\ \{\theta\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{p_x\} \\ \{p_y\} \\ \{M\} \end{Bmatrix} . \quad (5.50)$$

Cum  $\{p_x\} \neq \{0\}$ , iar  $\begin{Bmatrix} p_y \\ M \end{Bmatrix} = \{0\}$ , se va elimina vectorul  $\begin{Bmatrix} Y \\ \theta \end{Bmatrix}$  din relația (5.50), rezultă:

$$[r_{11}] \{X\} + [r_{12}] \begin{Bmatrix} Y \\ \theta \end{Bmatrix} = \{p_x\} , \quad (5.51)$$

$$[r_{21}] \{X\} + [r_{22}] \begin{Bmatrix} Y \\ \theta \end{Bmatrix} = \{0\} \quad . \quad (5.52)$$

Din relația (5.52) se determină vectorul  $\begin{Bmatrix} Y \\ \theta \end{Bmatrix}$ :

$$[r_{22}]^{-1} [r_{21}] = - \begin{Bmatrix} Y \\ \theta \end{Bmatrix} \quad . \quad (5.53)$$

Se substituie (5.53) în (5.51):

$$([r_{11}] - [r_{12}] [r_{22}]^{-1} [r_{21}]) \{X\} = - \{P_x\} \quad . \quad (5.54)$$

În concluzie: matricea de rigiditate în coordonatele dinamice ale sistemului vibrant, notată -  $[K]$ , se determină cu relația:

$$[K] = [r_{11}] - [r_{12}] [r_{22}]^{-1} [r_{21}] \quad . \quad (5.55)$$

# CURSUL 6

## SISTEME VIBRANTE CU $n$ GLD

**6.Vibrații forțate produse de acțiunea unor forțe perturbatoare armonice.**

**6.1. Metoda matricei de rigiditate**

**6.1.1. Aspecte teoretice**

Se consideră un sistem vibrant cu  $n$  GLD acționat de un sistem de forțe perturbatoare armonice, figura 6.1.a.

Se constituie vectorul forțelor perturbatoare,  $\{F(t)\}$  , de forma:

$$\{F(t)\} = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ \cdot \\ F_k(t) \\ \cdot \\ F_m(t) \end{Bmatrix}. \quad (6.1)$$

Sub acțiunea forțelor perturbatoare la un moment dat  $t$  al vibrațiilor, pe direcțiile GLD se pot măsura deplasări dinamice, notate  $y_j(t)$ , ordonate în vectorul  $\{y(t)\}$ :

$$\{y(t)\} = \begin{Bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \cdot \\ y_j(t) \\ \cdot \\ y_n(t) \end{Bmatrix}. \quad (6.2)$$

Pentru a analiza vibrațiile forțate ale sistemelor cu  $n$  GLD se va utiliza un sistem de bază dinamic, figura 1.c, obținut prin blocarea tuturor deplasărilor pe direcțiile GLD.

Sistemul de ecuații de echilibru dinamic instantaneu se deduce prin producerea, succesivă, de deplasări pe direcțiile GLD egale cu deplasările reale  $y_j(t)$ , aplicate ca cedări de reazeme, în „ $n$ ” situații de încărcare, pe sistemul de bază dinamic.

Urmând raționamentele de la vibrațiile libere ale sistemelor cu  $n$  GLD se constituie vectorul forțelor de inerție,  $\{F(t)\}$ , de forma:

$$\{I(t)\} = \begin{Bmatrix} I_1(t) \\ I_2(t) \\ \cdot \\ I_j(t) \\ \cdot \\ I_n(t) \end{Bmatrix} = -[m]\{\ddot{y}(t)\}. \quad (6.3)$$

unde:  $[m]$  reprezintă matricea diagonală a maselor sau matricea de inerție;

$\{\ddot{y}(t)\}$  - vectorul accelerațiilor

și vectorul forțelor elastice,  $\{F_e(t)\}$ , calculat cu relația:

$$F_e(t) = [K] \{y(t)\}, \quad (6.4)$$

în care  $[K]$  reprezintă matricea de rigiditate a sistemului vibrant, determinată în coordonatele dinamice ale sistemului.

Ecuațiile de echilibru dinamic instantaneu, stabilite prin aplicarea principiului lui d'Alambret, au alura:

$$- \{I(t)\} + [K] \{y(t)\} + \{R_F(t)\} = \{0\}, \quad (6.5)$$

unde vectorul  $\{R_F(t)\}$  are forma următoare:

$$\{R_F(t)\} = \begin{Bmatrix} R_{1,F}(t) \\ R_{2,F}(t) \\ \cdot \\ R_{j,F}(t) \\ \cdot \\ R_{n,F}(t) \end{Bmatrix}, \quad (6.6)$$

în care,  $R_{j,F}(t)$  reprezintă reacțiunea din blocajul „j” când sistemul de bază dinamic este acționat simultan de forțe perturbatoare exterioare.

Deoarece forțele perturbatoare considerate, în studiu, sunt armonice, de tipul:

$$F_k(t) = F_{0,k} \sin \theta t, \quad (6.7)$$

rezultă:

$$\{R_F(t)\} = \{R_0\} \sin \theta t \quad (6.8)$$

și

$$\{R_0\} = \begin{Bmatrix} R_{0,1} \\ R_{0,2} \\ \cdot \\ R_{0,j} \\ \cdot \\ R_{0,n} \end{Bmatrix}, \quad (6.9)$$

unde  $R_{0,j}$  reprezintă reacțiunea din blocajul „j” când sistemul de bază dinamic este acționat simultan de amplitudinile forțelor perturbatoare  $F_{0,k}$ .

Răspunsul permanent al sistemului, la acțiuni de tip armonic, are totdeauna o variație armonică de forma:

$$\{y(t)\} = \{y\} \sin \theta t, \quad (6.10)$$

în care s-a notat cu  $\{y\}$  vectorul deplasărilor dinamice maxime (în regim forțat).

De asemenea, în aceste condiții, forțele de inerție sunt determinate cu relația:

$$\{I(t)\} = \theta^2 [m] \{y\} \sin \theta t, \quad (6.11)$$

unde amplitudinile forțelor de inerție formează vectorul:

$$\{I\} = \theta^2 [m] \{y\}. \quad (6.12)$$

Introducând expresiile (6.8), (6.10), (6.11) în (6.5) se obține sistemul de ecuații:

$$([K] - \theta^2 [m]) \{y\} + \{R_0\} = \{0\}, \quad (6.13)$$

care reprezintă un sistem de ecuații algebrice.

Pentru ca sistemul, de mai sus, să admită soluții finite este necesar ca determinantul principal al sistemului să fie diferit de zero. Deci:

$$[K] - \theta^2 [m] \neq 0. \quad (6.14)$$

Dacă determinantul este nul, atunci deplasările tind către infinit, situație în care  $\theta = \omega$ , deoarece

$$[K] - \theta^2 [m] = 0. \quad (6.15)$$

Rezultă că întâlnim mai multe situații de rezonanță, și anume:

$$\theta = \omega_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (6.16)$$

### 6.1.2. Ordinea de calcul

În vederea aflării răspunsului dinamic în deplasări și în eforturi se parcurg următoarele etape de calcul:

- Se determină matricea de rigiditate în coordonatele dinamice ale sistemului vibrant,  $[K]$ ;
- Se constituie matricea maselor,  $[m]$ ;
- Se calculează vectorul termenilor liberi,  $\{R_0\}$ .

În cazul în care forțele perturbatoare sunt aplicate în dreptul maselor și pe direcțiile GLD se poate scrie egalitatea:

$$\{R_0\} = -\{F_0\}; \quad (6.17)$$

- d. Se rezolvă sistemul de ecuații (6.13) și se determină vectorul deplasărilor  $\{y\}$ , reprezentând răspunsul dinamic în deplasări ale sistemului;
- e. Se trasează diagramele de eforturi maxime și minime prin acționarea sistemului vibrant cu amplitudinile forțelor de inerție, cu dublu sens, relația (6.12), vectorul forțelor perturbatoare, cu dublu sens și vectorul forțelor gravitaționale.

## 6.2. Metoda matricei de flexibilitate

### 6.2.1. Aspecte teoretice

În vederea rezolvării problemei se consideră un sistem vibrant cu  $n$  GLD, desenat în figura 6.2, acționat de un sistem de forțe perturbatoare. La momentul „ $t$ ” al vibrației, pe direcțiile GLD se măsoară deplasările dinamice instantanee,  $y_j(t)$ . Vectorul deplasărilor are forma:

$$\{y(t)\} = \begin{Bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_j(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{Bmatrix} \quad (6.18)$$

Deplasările pe direcțiile GLD se obțin, prin suprapunerea efectelor, acționând sistemul vibrant cu forțele de inerție și forțele perturbatoare, v. figura 6.2.b:

$$\{y(t)\} = [\Delta] \{I(t)\} + \{\Delta_F(t)\} \quad (6.19)$$

sau

$$\{y(t)\} - [\Delta] \{I(t)\} + \{\Delta_F(t)\} = \{0\}, \quad (6.20)$$

unde:  $[\Delta]$  reprezintă matricea de flexibilitate a sistemului vibrant;

$\{I(t)\}$  - vectorul forțelor de inerție, determinat cu relația:

$$\{I(t)\} = -[m] \{\ddot{y}(t)\}; \quad (6.21)$$

$\{\Delta_F(t)\}$  - vectorul deplasărilor produse de forțele perturbatoare, care reprezintă termenul liber al ecuației matriceale de echilibru dinamic instantaneu.

Ecuația matriceală (6.20), după introducerea relației (6.21), devine:



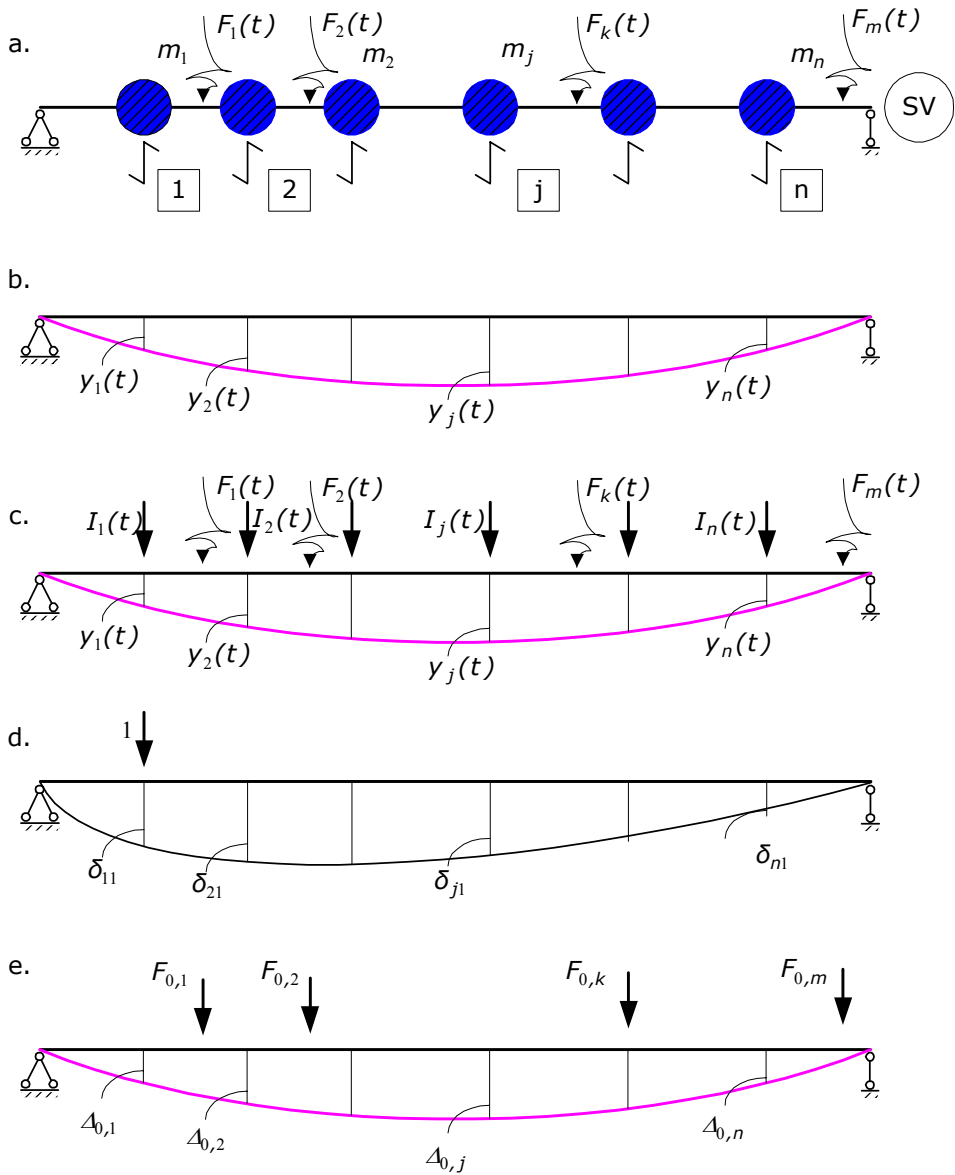


Fig. 6.2. Sistem vibrant cu n GLD:

a. sistemul acționat de forțe perturbatoare; b. deformată sistemului sub acțiunea forțelor perturbatoare; c. și d. deformată sistemului vibrant produse de acțiuni egale cu unitatea aplicate succesiv în dreptul maselor și pe direcțiile GLD; e. deformată sistemului produsă de amplitudinile forțelor perturbatoare.

$$[\Delta][m]\{\ddot{y}(t)\} + \{y(t)\} - \{\Delta_F(t)\} = \{0\}. \quad (6.22)$$

Soluția admisă de ecuația (6.22) este de tip armonic:

$$\{y(t)\} = \{y\} \sin \theta t, \quad (6.23)$$

în care:  $\{y\}$  reprezintă vectorul amplitudinilor deplasărilor dinamice;

$\theta$  - pulsația proprie a forței perturbatoare

Forțele perturbatoare se calculează cu relația:

$$F_m(t) = F_{0,m} \sin \theta t. \quad (6.24)$$

Introducând relația (6.23) în ecuația (6.22) se obține:

$$(\theta^2 [\Delta][m] - [I]) \{y\} + \{\Delta_0\} = \{0\}, \quad (6.25)$$

deoarece:

$$\{\Delta_F(t)\} = \{\Delta_0\} \sin \theta t. \quad (6.26)$$

### 6.2.2. Etape de calcul

Pentru determinarea răspunsului dinamic în deplasări și în eforturi se parcurg următoarele etape de calcul:

a. Se constituie matricea maselor:

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & & & & \\ & m_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & m_j & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & m_n \end{bmatrix}; \quad (6.27)$$

b. Se determină matricea de flexibilitate a sistemului vibrant:

$$[\Delta] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \delta_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \cdot & \cdot & \cdot & \delta_{jn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & \delta_{nn} \end{bmatrix}; \quad (6.28)$$

c. Se calculează vectorul termenilor liberi,  $\{\Delta_0\}$ . Pentru aceasta se încarcă sistemul vibrant cu amplitudinile forțelor perturbatoare și se determină deplasările pe direcțiile GLD.

În cazul în care forțele perturbatoare sunt aplicate în dreptul maselor și pe direcțiile GLD, atunci:

$$\{\Delta_0\} = [\Delta] \{F_0\}, \quad (6.29)$$

unde  $\{F_0\}$  reprezintă vectorul amplitudinilor forțelor perturbatoare:

$$\{F_0\} = \begin{Bmatrix} F_{0,1} \\ F_{0,2} \\ \cdot \\ F_{0,j} \\ \cdot \\ F_{0,n} \end{Bmatrix}; \quad (6.30)$$

- d. Răspunsul în deplasări se obține prin rezolvarea sistemului de ecuații de echilibru (6.25);
- e. Răspunsul în eforturi se calculează prin acționarea sistemului vibrant cu amplitudinile forțelor de inerție,  $\{I\}$ :

$$\{I\} = \theta^2 [m] \{y\} \quad (6.31)$$

și amplitudinile forțelor perturbatoare,  $\{F_0\}$ .

# CURSUL 7

## SISTEME VIBRANTE CU NGLD

### **7.1. Analiza modală a răspunsului dinamic al sistemelor cu nGLD**

Se consideră un sistem cu nGLD. Analiza modală a răspunsului dinamic constă în exprimarea ecuațiilor de mișcare, prin intermediul unui număr de „n” ecuații independente, obținute prin decuplarea sistemului de ecuații de echilibru.

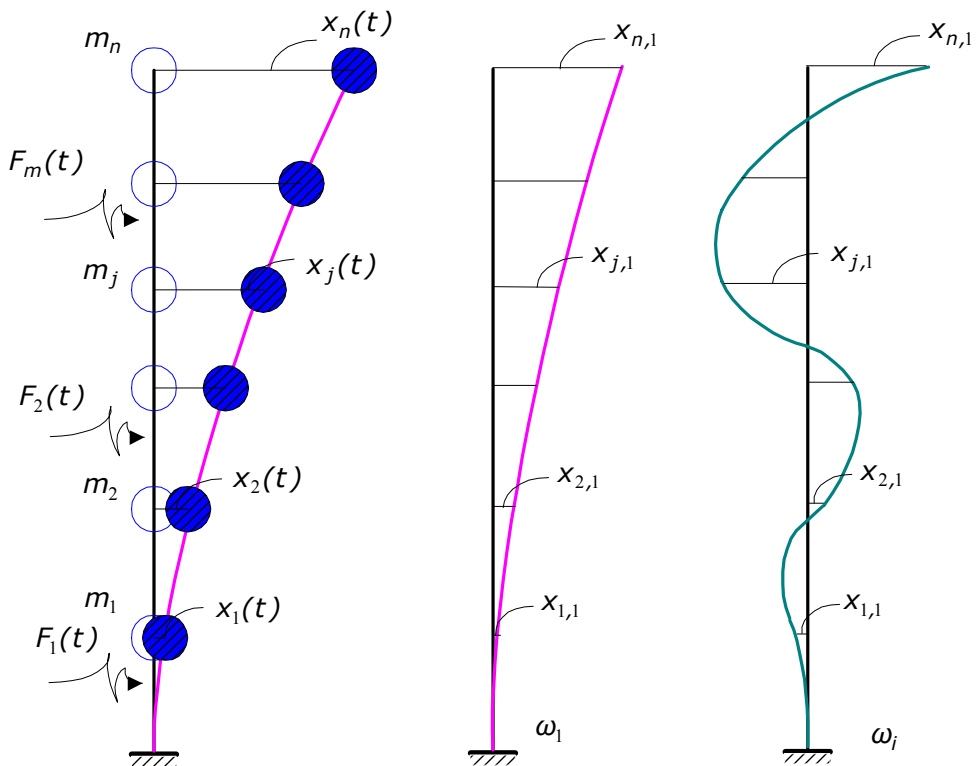


Fig. 7.1. Sistem vibrant cu nGLD acționat de forțe perturbatoare

Ecuția matriceală de echilibru dinamic, prin analogie cu sistemul cu 1GLD, are forma:

$$[m]\{\ddot{x}(t)\} + [c]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{F(t)\}, \quad (7.1)$$

unde :

- $[m]$  reprezintă matricea maselor sau de inerție;
- $[c]$  - matricea de amortizare;
- $[K]$  - matricea de rigiditate a sistemului vibrant;
- $\{x(t)\}$  - vectorul deplasărilor dinamice instantanee;
- $\{F(t)\}$  - vectorul forțelor perturbatoare.

Obs. Alura ecuației (7.1), referitor la termenul liber, este corectă numai dacă forțele perturbatoare sunt aplicate în dreptul maselor și pe direcția gradelor de libertate.

Pentru decuplarea sistemului de ecuații (7.1) se efectuează următoarea schimbare de variabilă:

$$\{x(t)\} = [\bar{X}]\{\Phi(t)\} \quad (7.2)$$

sau

$$x_j(t) = \sum_i^n \bar{X}_{j,i} \Phi_i(t), \quad (7.3)$$

în care:

$[\bar{X}]$  reprezintă matricea modală normalizată;

$\Phi_i(t)$  - coordonata generalizată care precizează amplitudinea modului „i” de vibrație pe direcția gradului de libertate „j”.

Obs. O formă proprie de vibrație normalizată se calculează cu relația:

$$\{\bar{X}\}_{ji} = \frac{1}{\sqrt{M_i}} \{X\}_{ji}, \quad (7.4)$$

unde  $M_i$  reprezintă masa generalizată corespunzătoare modului „i” de vibrație și se determină cu relația:

$$M_i = \{X\}_{ji}^T [m] \{X\}_{ji}. \quad (7.5)$$

Prin introducerea expresiei (7.2) în ecuația (7.1) se obține:

$$[m][\bar{X}]\{\ddot{\Phi}(t)\} + [c][\bar{X}]\{\dot{\Phi}(t)\} + [K][\bar{X}]\{\Phi(t)\} = \{F(t)\}. \quad (7.6)$$

Ecuația (7.6) se premultiplică cu matricea modală transpusă, care devine:

$$[\bar{X}]^T [m][\bar{X}]\{\ddot{\Phi}(t)\} + [\bar{X}]^T [c][\bar{X}]\{\dot{\Phi}(t)\} + [\bar{X}]^T [K][\bar{X}]\{\Phi(t)\} = [\bar{X}]^T \{F(t)\}. \quad (7.7)$$

Se cunosc următoarele produse matriceale:

$$[\bar{X}]^T [m][\bar{X}] = [I], \quad (7.8)$$

$$[\bar{X}]^T [c][\bar{X}] = [2v\omega] \quad (7.9)$$

și

$$[\bar{X}]^T [K][\bar{X}] = [\omega^2], \quad (7.10)$$

unde  $v$  reprezintă fracțiunea din amortizarea critică.

Luând în considerare relațiile (7.8) - (7.10), ecuația (7.7) ia forma:

$$\{\ddot{\Phi}(t)\} + [2v\omega] \{\dot{\Phi}(t)\} + [\omega^2] \{\Phi(t)\} = [\bar{X}]^T \{F(t)\}. \quad (7.11)$$

Analizând ecuația matriceală (7.11) rezultă că sistemul este decuplat, s-a transformat în „n” ecuații independente de tipul:

$$\ddot{\Phi}_i(t) + 2v_i\omega_i\dot{\Phi}_i(t) + \omega_i^2\Phi_i(t) = \sum_{j=1}^n F_j(t). \quad (7.12)$$

Soluția ecuației (7.12) este:

$$\Phi_i(t) = A_i e^{-u_i\omega_i t} \sin(\omega_i t + \varphi) + \frac{1}{\omega_i} \int_0^t \sum_{j=1}^n X_{j,i} F_j(\tau) e^{-u_i\omega_i \tau} \sin \omega_i(t - \tau) d\tau. \quad (7.13)$$

În cazul în care forțele perturbatoare sunt de tip armonic și acționează simultan, amplitudinea deplasării dinamice, corespunzătoare modului „j” de vibrație, devine:

$$x_j = \sum_{i=1}^n X_{j,i} \frac{\sum_{j=1}^n X_{j,i} F_{0,j}}{\omega_i^2 \sum_{j=1}^n X_{j,i}^2 m_j} \mu_i, \quad (7.14)$$

unde :

$F_{0,j}$  reprezintă amplitudinea forței perturbatoare;

$\mu_i$  - factorul de amplificare dinamică, calculat cu relația:

$$\mu_i = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega_i^2}\right)^2 + 4u_i^2 \frac{\theta_i^2}{\omega_i^2}}}. \quad (7.15)$$

## 7.2. Etape de calcul în analiza modală a răspunsului dinamic al sistemelor cu nGLD

- a) Se constituie matricea maselor,  $[m]$ ;
- b) Se calculează matricea de rigiditate,  $[K]$ ;
- c) Se determină modurile principale de vibrație:
  - a. pulsații proprii:

$$[K] - \omega^2 [m] = 0,$$

rezultă matricea spectrală:  $[\Omega]$ ;

b. forme proprii de vibrație:

$$([K] - \omega_i^2 [m])\{X\}_i = \{0\},$$

rezultă formele proprii de vibrație:

$$\{X\}_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

d) De calculează răspunsul dinamic în deplasări, prin aplicarea relației (7.14);

e) Se determină amplitudinile forțelor de vibrație:

$$\{I\} = \theta^2 [m]\{X\}; \quad (7.16)$$

f) Se trasează diagramele de eforturi, reprezentând răspunsul în eforturi, prin încărarea sistemului vibrant cu amplitudinile forțelor de inerție și amplitudinile forțelor perturbatoare, cu dublu sens și forțele gravitaționale.



# CURSUL 8

## CALCULUL DE STABILITATE. CALCULUL DE ORDINUL II

### 8.1. Considerații generale

Construcțiile pot fi solicitate de acțiuni statice și/sau dinamice.

Prin aplicarea statică a unei acțiuni pe o structură se acceptă o creștere a mărimii ei, de la valoarea zero la valoarea finală. În acest timp, structura trece lent din poziția inițială nedeformată (PIN), în poziția finală deformată (PD).

Se admite, în această situație, că viteza de deplasare a maselor este nulă ( $v=0$ ) și, în consecință, energia cinetică este nulă.

În cazul în care se acceptă o anumită comportare a materialului, din care este realizată construcția, iar această comportare se poate schematiza prin intermediul relației  $\sigma - \varepsilon$  (tensiune – deformație specifică) sau  $P - \Delta$  (forță – deplasare) de tip liniar, atunci analiza structurii corespunde unui calcul de ordinul I, liniar elastic.

Conform acestei ipoteze apar următoarele consecințe:

- a. ecuațiile de echilibru static se exprimă în raport cu poziția inițială a structurii, deoarece deplasările sunt mici în raport cu dimensiunile elementelor structurii;
- b. se aplică principiul suprapunerii efectelor;
- c. structura reprezintă un sistem conservativ;
- d. proprietățile de rigiditate (flexibilitate) ale structurii nu depind de nivelul forțelor exterioare, ci numai de caracteristicile structurii și de natura materialului.

Prin urmare, pentru determinarea stării de tensiune și deformație se exprimă echilibrul, prin intermediul unor ecuații algebrice, în raport cu poziția inițială nedeformată.

În cazul în care se admite că relația  $\sigma - \varepsilon$  este liniară, iar relația  $P - \Delta$  este neliniară, deplasările pot fi mici sau mari dar rotirea barelor, de corp rigid, să fie mici, analiza structurii se realizează printr-un calcul de ordinul II, elastic liniar și geometric neliniar.

Consecințele acestei ipoteze sunt:

- a. independent de mărimea deplasărilor, ecuațiile de echilibru static se exprimă în raport cu forma deformată a structurii (PD);
- b. principiul suprapunerii efectelor se aplică numai pentru forțelor transversale, cu condiția ca forța axială să fie constantă;
- c. eforturile și deplasările sunt funcții neliniare de forțele axiale, iar energia de deformație este o funcție de gradul 3 sau 4 de deplasările nodurilor structurii;
- d. rigiditatea elementelor structurii, în ansamblu, este funcție de nivelul forțelor exterioare;
- e. soluția problemei se determină prin cicluri de calcul, deoarece forma deformată reală nu este cunoscută de la început.

Scrierea echilibrului, în raport cu poziția deformată a structurii, face obiectul de studiu al stabilității și/sau al calculului de ordinul II.

*Calculul de stabilitate constă din identificarea naturii echilibrului poziției deformată a unei structuri. Mărimile forțelor axiale sunt necunoscute.*

*Calculul de ordinul II constă din determinarea stării de tensiune și deformație, dintr-o structură acționată de un ansamblu de forțe, prin exprimarea echilibrului în raport cu poziția deformată a acesteia. În calculul de ordinul II sarcinile transversale și eforturile axiale se presupun cunoscute.*

## 8.2. Calculul de stabilitate. Tipuri de pierdere a stabilității

Se consideră două structuri: grinda simplu rezemată și grinda încastrată, figura 8.1. În cazul în care structurile nu sunt solicate de forțe exterioare ele se găsesc în poziții inițiale nedeformate (PIN, figura 1.a<sub>1</sub> și a<sub>2</sub>).

Dacă asupra structurilor se acționează cu forțe exterioare, care produc forțe axiale (sau se aplică încărcări pe direcțiile axelor structurilor, de intensitate  $P$ ), atunci structurile trec din pozițiile inițiale (PIN) în pozițiile deformată (PD).

Prin acțiunea unei cauze perturbatoare extrem de mici, o structură (fie grinda simplu rezemată sau grinda încastrată) trece din poziția deformată (PD) într-o poziție deformată auxiliară (PD<sub>a</sub>).

La îndepărtarea cauzei exterioare se constată următoarele:

- structura revine din PD<sub>a</sub> în PD – se conchide că poziția deformată (PD) se găsește într-un echilibru stabil;
- structura din PD<sub>a</sub> tinde să se îndepărteze de PD – se consideră că poziția deformată se află într-un echilibru instabil;
- structura rămâne în PD<sub>a</sub> – situați este considerată proprie poziției de echilibru indiferent, referitor la PD.

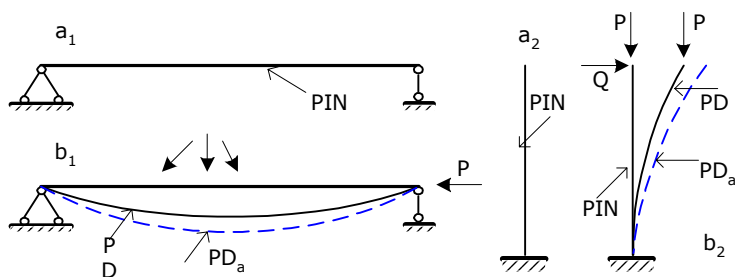


Fig.8.1. Stările inițiale și stările deformată ale unor structuri

În concluzie, luând în considerare cele de mai sus, se poate stabili obiectul de studiu al calculului de stabilitate. Acesta este: *stabilitatea structurilor se ocupă cu identificarea echilibrului indiferent al poziției deformată a unei structuri acționate de un sistem de forțe.*

Apare evident că, poziția deformată a unei structuri depinde de următoarele:

- natura și numărul legăturilor structurii;
- caracteristicile geometrice și fizico-mecanice ale structurii;
- modul de încărcare a structurii.

La identificarea echilibrului indiferent al poziției deformată a unei structuri, se consideră primii doi parametri, precizați mai sus, constanți, iar ultimul variabil (încărcările cresc proporțional).

În funcție de modul de acționare a încărcărilor, pierderea stabilității unei structuri se produce prin două mecanisme distincte, și anume:

- deformare discontinuă;
- deformare continuă.

### 8.2.1. Pierderea stabilității prin deformare discontinuă

În această categorie sunt cuprinse toate structurile la care poziția de echilibru este poziția nedeformată. Poziția nedeformată se păstrează pe toată perioada în care intensitatea sarcinilor crește până atinge valoarea critică, notată  $P_{cr}$ . Imediat după ce se ajunge la valoarea critică a încărcării, structura trece brusc din poziția inițială nedeformată într-o poziție deformată.

Curba de variație a unei deplasări normale pe axa barei, notată „ $d$ ”, în raport cu forța „ $P$ ” este prezentată în figura 8.2.a. Se observă că trecerea de la poziția nedeformată,  $PD$ , este marcată printr-o discontinuitate. Deplasările ce se produc după atingerea pragului critic ( $P_{cr}$ ) se pot dezvolta într-un sens sau în altul (funcție de sensul pozitiv sau negativ al axei deplasărilor).

Modul de pierdere a stabilității arătat în figura 8.2. se numește *pierdere stabilității prin bifurcare*.

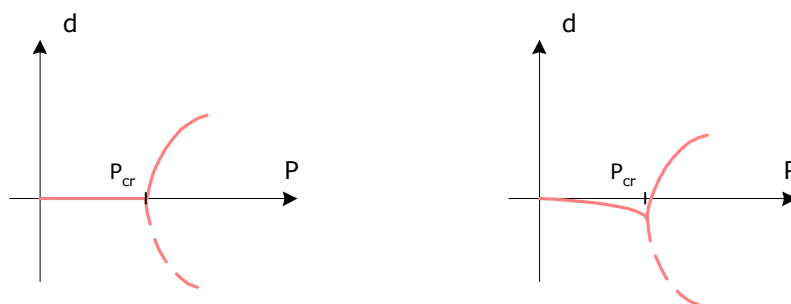


Fig. 8.2. Pierderea stabilității prin bifurcare

În figura 8.3 sunt prezentate exemple de structuri solicate de

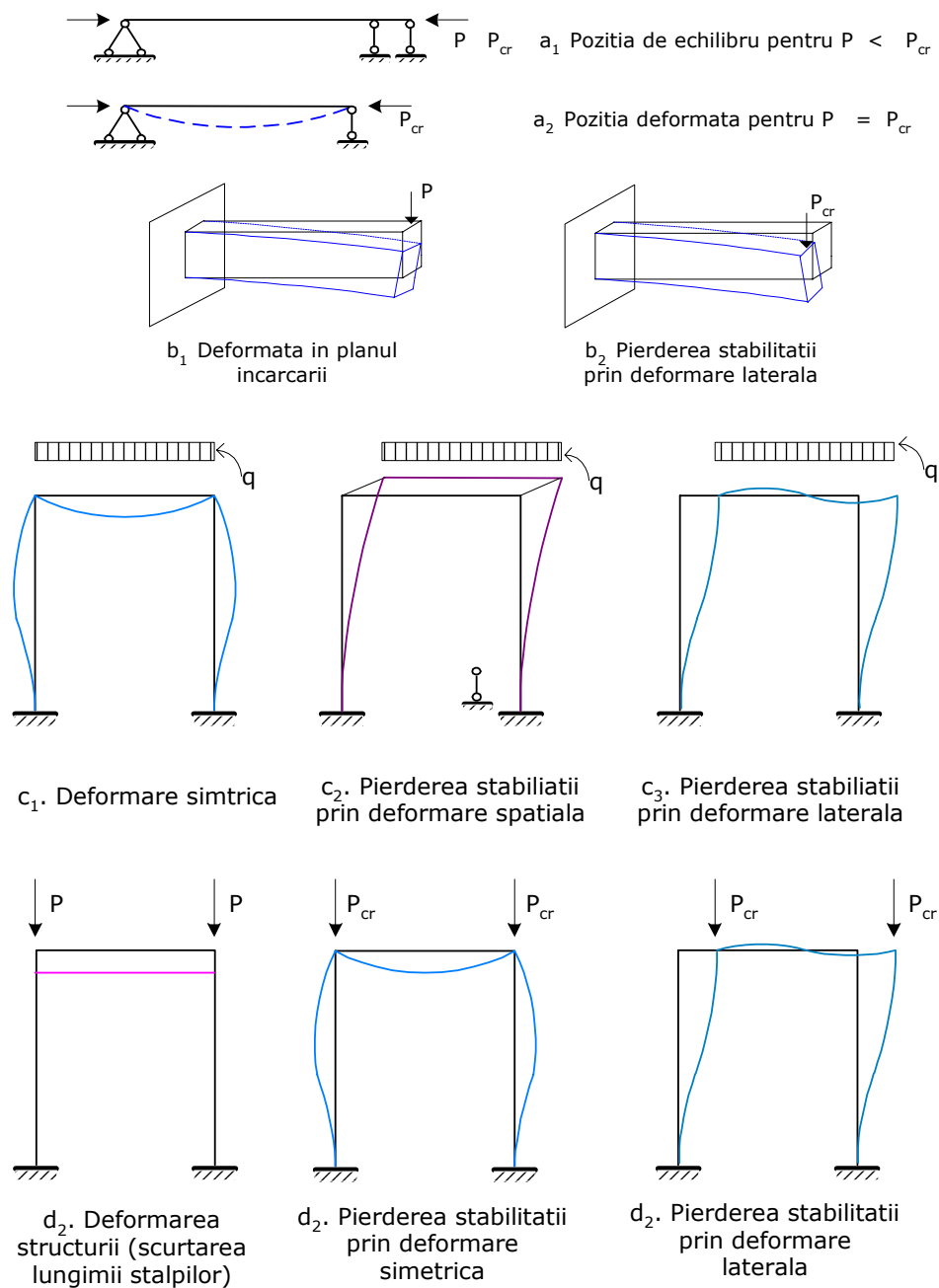


Fig. 8.3. Pierderea stabilității prin deformare discontinuă

forțe exterioare care își pierd stabilitatea prin bifurcarea echilibrului.

În cazul cadrelor din figura 8.3.c și d pot apărea deplasări mici care se dezvoltă odată cu creșterea încărcărilor, dar pierderea stabilității se produce prin deformări în alt plan decât în cel în care s-au produs primele deformații, de exemplu: în plan lateral sau perpendicular pe planul structurii (flambaj lateral).

De asemenea, în această categorie se poate include și structura inelară acționată radial de încărcări, care își micșorează diametrul prin deformare, dar pierderea stabilității, la atingerea valorii critice a intensității acțiunii, se identifică cu o deformată de altă formă (forma ovală). Caracteristic pentru această structură este curba forță - deplasare desenată în figura 8.2.b.

### 8.2.2. Pierderea stabilității prin deformare continuă

Se consideră o grindă simplu rezemată acționată de o forță axială și de un sistem de forțe aplicat transversal axei grinzii, figura 8.4. Cu cât crește intensitatea forței  $P$  cu atât se mărește deformata grinzii. În apropierea unei valori a încărcării axiale, notate  $P_{cr}$ , deformațiile cresc foarte repede, ca și cum rigiditatea structurii s-ar micșora brusc, figura 8.4.b.

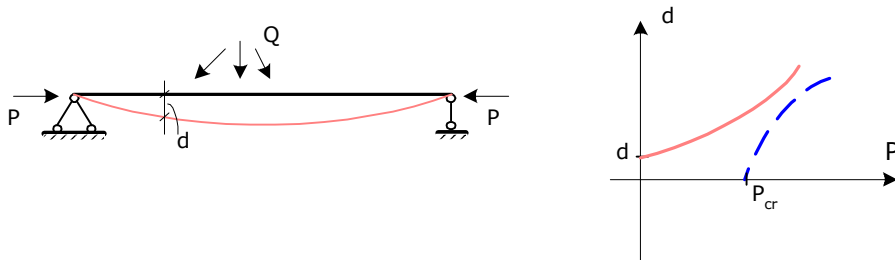


Fig. 8.4. Pierderea stabilității prin deformare discontinuă

Pierderea stabilității prin deformare discontinuă se datorește imperfecțiunii axei, excentricității aplicării sarcinii și imposibilității înlăturării forțelor transversale.

### 8.3. Ecuația de echilibru critic (ecuația de stabilitate)

Pierderea stabilității prin deformare discontinuă are loc atunci când forțele exterioare, care acționează numai în lungul axelor barelor, ating valoarea critică; structura trece, atunci, brusc într-o nouă poziție (structura din PIN ajunge în PD); pentru orice creștere a sarcinii, structura capătă deformații mari (teoretic infinit de mari).

### 8.3.1. Bara dreaptă

Se consideră o bară încastrată acționată de o forță concentrată, de intensitate  $P$ , în lungul axie barei, figura 8.5.a.

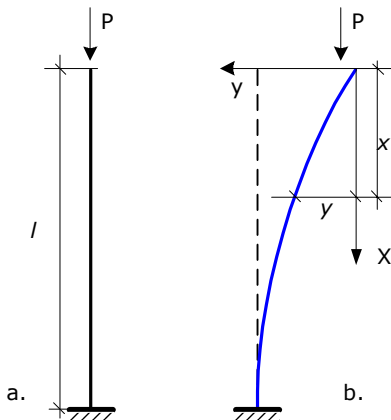


Fig. 8.5. Grinda în consolă acționată de o forță axială,  $P$ :  
a. grinda în situația inițială (PIN); b. grinda în situația deformată, PD

Pentru a obține ecuația de echilibru critic se pleacă, în demonstrație, de la ecuația diferențială a fibrei medii deformat:

$$y'' = -\frac{M_z(x)}{EI}. \quad (8.1)$$

Conform figurii 5.b, în care grinda încastrată și-a pierdut stabilitatea, se exprimă momentul înconvoieror din secțiunea  $x$ :

$$M_z(x) = P * y. \quad (8.2)$$

Se introduce expresia (8.2) în (8.1) și se obține:

$$y'' + \frac{P}{EI} y = 0 \quad (8.3)$$

sau

$$y'' + n^2 y = 0 \quad (8.4)$$

unde, s-a notat:

$$n^2 = \frac{P}{EI}. \quad (8.5)$$

Se propune pentru ecuația (8.4) o soluție de forma:

$$y = C_1 \sin nx + C_2 \cos nx. \quad (8.6)$$

Constantele de integrare se obțin punând următoarele condiții la limită:

$$x = 0 \rightarrow y = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \quad (8.7)$$

și

$$x = l \rightarrow y' = 0 \Rightarrow C_1 = \text{nconl} = 0. \quad (8.8)$$

Oricare din cei trei termeni ai ecuației (8.8):  $C_1$ ,  $n$  sau  $\cos nx$ , dacă se anulează, arată că ecuația (8.8) este verificată. Se vor analiza, pe rând, aceste condiții:

- dacă  $C_1=0$ , atunci relația (6) se anulează,  $y=0$ , ceea ce înseamnă că grinda nu este solicitată;
- dacă  $n=0$ , atunci conform expresiei (5) rezultă că  $P=0$ , înseamnă că grinda nu este solicitată;
- $\cos nl=0$  și această soluție conduce la anularea expresie (8.8), se conchide că:

$$\cos nl = 0 \quad (8.9)$$

reprezintă ecuația de echilibru critic (de stabilitate) a grinzii încastrate.

Ecuația (8.9) este verificată pentru

$$nl = \frac{(2k+1)\pi}{2}. \quad (8.10)$$

Analizând expresia (8.10) rezultă că pentru  $k=0$  se deduce cea mai mică valoare a încărcării  $P$ , deci:

$$nl = \frac{\pi}{2}$$

și

$$n^2 = \frac{\pi^2}{4l} = \frac{P_{cr}}{EI} \quad (8.11)$$

de unde, se ajunge la expresia forței critice care produce pierderea stabilității grinzii încastrate:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{EI}. \quad (8.12)$$

### 8.3.2. Cadre

În metoda deplasărilor ecuația matriceală generală de echilibru static are forma:

$$[r_{ij}] \{z_j\} + \{R_{ip}\} = \{0\}. \quad (8.13)$$



În cazul pierderii stabilității prin deformare discontinuă, vectorul termenilor liberi este nul, iar pentru ca ecuația (8.13) să aibe soluție diferită de zero este necesar ca determinantul matricei coeficienților să se anuleze. Prin urmare:

$$D_i = 0, \quad (8.14)$$

ceea ce reprezintă ecuația de stabilitate a cadrelor.

În cazul pierderii stabilității prin deformare discontinuă, termenul liber este diferit de zero,  $\{R_{ip}\} \neq \{0\}$ . Cum însă deforata trebuie să crească continuu, către infinit, rezultă că determinantul trebuie să se anuleze. Se obține o ecuația de stabilitate, exprimată tot prin expresia (8.14).

# CURSUL 9

## CALCULUL DE ORDINUL II

### 9.1. Grinda încastrată

Se consideră o grindă încastrată, încărcată ca în figura 9.1.a.

Se cere să se traseze diagrama de moment încovoietor și să se determine expresia săgeții extremității libere a grinzii, echilibrul static fiind exprimat în raport cu poziția deformată a grinzii. Prin urmare, se dorește să se efectueze un calcul de ordinul II.

Din Statica de ordinul I, se cunosc expresiile momentului încovoietor din încastrare și a săgeții capătului liber a grinzii încastrate, acestea sunt:

$$M_2(x=l) = Hl, \quad (9.1)$$

$$y_1(x=0) = \frac{Hl}{3EI}. \quad (9.2)$$

Diagrama de moment încovoietor este trasată în figura 9.1.c.

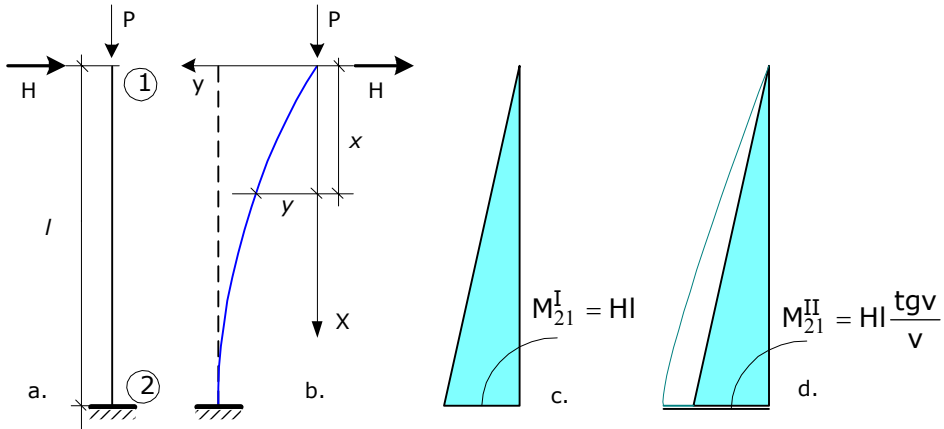


Fig. 9.1. Grinda încadrată: a. situație de încărcare; b. poziția deformată, c. diagrama de moment încovoietor de ordinul I; d. diagrama de moment încovoietor de ordinul II

Se pleacă în demonstrație de la ecuația fibrei medii deformate, relația (9.3):

$$y'' = -\frac{M_z(x)}{EI}. \quad (9.3)$$

Conform figura 9.1.b, momentul încovoietor,  $M_z(x)$ , din secțiunea x se calculează cu relația:

$$M_z(x) = Py + Hx. \quad (9.4)$$

Se introduce (9.4) în (9.3) și se obține:

$$y'' = -\frac{P}{EI}y - \frac{H}{EI}x \quad (9.5)$$

sau

$$y'' + n^2 y = -\frac{H}{EI}x, \quad (9.6)$$

unde:

$$n^2 = \frac{P}{EI}. \quad (9.7)$$

Soluția ecuației (9.6) este:

$$y = C_1 \sin nx + C_2 \cos nx , \quad (9.8)$$

cu prima derivată:

$$y' = C_1 n \cos nx - C_2 n \sin nx - \frac{H}{P} . \quad (9.9)$$

Considerând condițiile la limită ale deformatelor grinzii încastrate:

$$x = 0 \rightarrow y = 0 \quad (9.10)$$

și

$$x = l \rightarrow y' = 0 , \quad (9.11)$$

se găsesc expresiile celor două constante de integrare:

$$C_2 = 0 , \quad (9.12)$$

$$C_1 n \cos nl - \frac{H}{P} = 0$$

sau

$$C_1 = \frac{H}{P n \cos nl} \quad (9.13)$$

Introducând (9.12) și (9.13) în (9.8) se ajunge la expresia săgeții într-o secțiune  $x$  a grinzii:

$$y(x) = \frac{H}{P} \left( \frac{\sin nx}{n \cos nl} - x \right) . \quad (9.14)$$

Expresia (9.14) pentru  $x = l$ , devine:

$$y_{\max} = \frac{H}{P} \left( \frac{\sin nl}{n \cos nl} - l \right) \quad (9.15)$$

sau

$$y_{\max} = \frac{H l^3}{3EI} \frac{3(\operatorname{tg} v - v)}{v^3} \quad (9.16)$$

unde

$$v = nl = l \sqrt{\frac{P}{EI}} , \quad (9.17)$$

reprezentând factorul de compresiune.

Momentul încovoietor se calculează cu relația (9.4). Dacă în această relație se introduce expresiei (9.15) și prin efectuarea de operații algebrice specifice, se ajunge la formula:

$$M_z(x) = HI \frac{\sin nx}{v \cos v}. \quad (9.18)$$

Pentru  $x=l$  se obține valoarea maximă a momentului încovoietor sin secțiunea de încastrare a grinzii:

$$M_{\max}^{\text{II}} = HI \frac{\operatorname{tg} v}{v}. \quad (9.19)$$

Diagrama de moment încovoietor de ordinul II este trasată în figura 9.1.d.

Comparând expresiile (9.19) cu (9.1) și (9.16) cu (9.2), se evidențiază diferențele între rezultatele care se obțin, în cazul în care se exprimă echilibrului în raport cu poziția inițială, față de cazul când echilibrul se exprimă în raport cu poziția deformată.

## 9.2. Calculul de ordinul II. Determinarea eforturilor și deplasărilor prin metoda parametrilor în origine

În vederea efectuării unui calcul de ordinul II al barei drepte se propune ca metodă de analiză metoda parametrilor în origine. Se presupune o bară în diferite siruații de încărcare: parametrii în origine; sarcini concentrate: forță și cuplu, sarcini distribuite etc.

Ca ipoteze de lucru se admit următoarele:

- bara are axa dreaptă, secțiunea transversală constantă și este realizată din același material; rigiditatea la solicitarea de încovoiere este constantă,  $EI = \text{cons.}$ , se presupune că efortul axial, pe lungimea de bară, luată în studiu, este constant și este determinat printr-un calcul de ordinul I;
- parametrii în origine:  $M_o$ ,  $N_o$ ,  $T_o$ ,  $\varphi_o$ ,  $y_o$  sunt constanți; o parte din ei pot fi nuli, cu excepția efortului axial ( $N_o$ ).

### 9.2.1. Bara dreaptă acționată în origine de parametrii în origine $M_o$ , $N_o$ , $T_o$ , $\varphi_o$ , $Y_o$

Se consideră o bară dreaptă, figura 9.2, încărcată în origine cu următorii parametrii inițiali:  $M_o$ ,  $N_o$ ,  $T_o$ ,  $\varphi_o$  și  $Y_o$ .

Ecuția diferențială a fibrei medii deformată este:

$$y''(x) = - \frac{M_z(x)}{EI}. \quad (9.20)$$

În conformitate cu figura 9.2, expresia momentului încovoiător în secțiunea „x” a barei, acționată în origine de parametrii:  $M_o$ ,  $N_o$ ,  $T_o$ ,  $\varphi_o$  și  $Y_o$ , are forma:

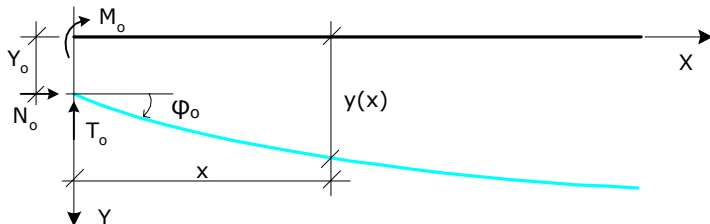


Fig. 9.2. Bara dreaptă acționată de parametri în origine

$$M_z(x) = M_o + T_o x + N_o(y(x) - Y_o). \quad (9.21)$$

Introducând (9.21) în (9.20) se obține ecuația diferențială de ordinul al II-lea:

$$y''(x) + n^2 y(x) = -\frac{M_o}{EI} - \frac{T_o}{EI} x + \frac{N_o}{EI} Y_o, \quad (9.22)$$

unde:

$$n^2 = \frac{N_o}{EI}. \quad (9.23)$$

Soluția ecuației (9.22) este:

$$y(x) = C_1 \sin nx + C_2 \cos nx - \frac{M_o}{N_o} - \frac{T_o}{N_o} x + Y_o. \quad (9.24)$$

Se derivează expresia (9.24) și se deduce relația de calcul a rotirii în secțiunea „x”:

$$y'(x) = C_1 n \cos nx - C_2 n \sin nx - \frac{T_o}{N_o}. \quad (9.25)$$

Constantele de integrare,  $C_1$  și  $C_2$ , din expresia (9.24), se determină din condiții la limită (în origine), funcție de parametri în origine (considerați cunoscuți):

$$x = 0 \begin{cases} y = Y_o \\ y' = \varphi_o \end{cases}. \quad (9.26)$$

Introducând (9.26) în (9.24) și (9.25) rezultă expresiile de calcul a celor două constante de integrare:

$$C_2 = \frac{M_0}{N_0} \quad (9.27)$$

și

$$\varphi_0 = C_1 n - \frac{T_0}{N_0} \quad (9.28)$$

sau

$$C_1 = \frac{\varphi_0}{n} + \frac{T_0}{nN_0} . \quad (9.29)$$

Luând în considerare relația (9.23) și expresiile (9.27) și (9.29), constantele de integrare pot fi scrise sub formele:

$$C_1 = \frac{\varphi_0}{n} + \frac{T_0}{n^3 EI} \quad (9.30)$$

$$C_2 = \frac{M_0}{n^2 EI} . \quad (9.31)$$

Introducând (9.30) și (9.31) în (9.24) expresia săgeții măsurate în secțiunea „x” devine:

$$y(x) = \left( \frac{\varphi_0}{n} + \frac{T_0}{nN_0} \right) \sin nx + \frac{M_0}{N_0} \cos nx - \frac{M_0}{N_0} - \frac{T_0}{N_0} x + Y_0 \quad (9.32)$$

sau

$$y(x) = Y_0 + \frac{\varphi_0}{n} \sin nx - \frac{M_0}{n^2 EI} (1 - \cos nx) - \frac{T_0}{n^3 EI} (nx - \sin nx) . \quad (9.33)$$

Se derivează succesiv, de două ori, relația (9.33) și se obține relația de calcul a deplasării unghiulare (a rotirii) a secțiunii „x”, respectiv, prin înmulțirea derivatei a doua a săgeții cu EI (modulul de rigiditate la solicitarea de încovoiere), expresia de calcul a momentului încovoiator din secțiunea „x” este:

$$y'(x) = \varphi(x) = \varphi_0 \cos nx - \frac{M_0}{nEI} \sin nx - \frac{T_0}{n^2 EI} (1 - \cos nx) \quad (9.34)$$

și

$$M_z(x) = -EI y''(x) = EI n \varphi_0 \sin nx + M_0 \cos nx + \frac{T_0}{n} \sin nx . \quad (9.35)$$

Forța tăietoare corespunzătoare secțiunii „x” se determină direct prin exprimarea echilibrului în raport cu axa OY,  $\sum y = 0$ .

### 9.2.2. Bara dreaptă acționată în secțiunea $x = a$ de o forță concentrată

Se consideră o bară dreaptă, figura 9.3, încărcată în secțiunea „ $x$ ” cu o forță concentrată de intensitate  $Q$ .

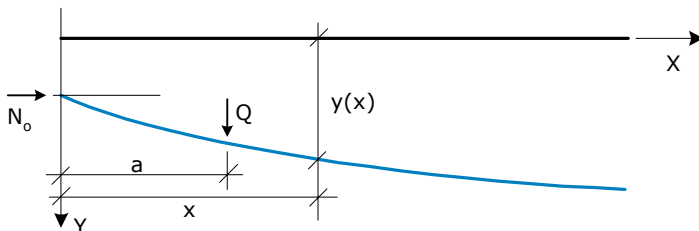


Fig. 9.3. Bara dreaptă solicitată de o forță concentrată

Pentru determinarea eforturilor și deplasărilor de ordinul II din secțiunea „ $x$ ” se folosesc relațiile de calcul (9.33), (9.34) și (9.35). Prin considerarea originii la distanța „ $a$ ” de capătul din dreapta al barei, acolo unde bara este solicitată de forța concentrată de intensitate  $Q$ , noii parametri în origine devin:

$$T_0 = -Q, M_0 = 0, N_0, \varphi_0 = Y_0 = 0. \quad (9.36)$$

Se notează cu  $\Delta y, \Delta$  și  $\Delta M$  săgeata, rotirea și, respectiv, momentul încovoietor din secțiunea „ $x$ ”. Relațiile de calcul ale deplasărilor și eforturilor de ordinul II se determină prin particularizarea relațiilor (9.33), (9.34) și (9.35):

$$\Delta y = \frac{Q}{n^3 EI} [n(x-a) - \sin n(x-a)], \quad (9.37)$$

$$\Delta = \frac{Q}{n^2 EI} [1 - \cos n(x-a)], \quad (9.38)$$

$$\Delta M = -\frac{Q}{n} \sin n(x-a). \quad (9.39)$$

### 9.2.3. Bara dreaptă acționată în secțiunea $x = a$ de un cuplu concentrat

În figura 9.4. se prezintă o bară dreaptă încărcată în secțiunea  $x=a$  cu un cuplu concentrat de intensitate  $M^c$ .

Noua situație de încărcare se analizează identic ca în cazul precedent:



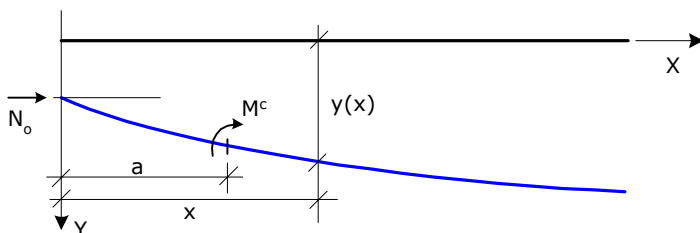


Fig. 9.4. Bara dreaptă solicitată de un cuplu concentrat

- a) parametrii în noua origine sunt  $T_0 = 0$ ,  $M_0$ ,  $N_0$ ,  $\varphi_0 = Y_0 = 0$  ;  
 b) expresiile de calcul a deplasărilor și eforturilor de ordinul II de determină cu relațiile:

$$\Delta y = \frac{M^c}{n^2 EI} [1 - \cos n(x - a)], \quad (9.40)$$

$$\Delta = \frac{M^c}{n EI} \sin n(x - a), \quad (9.41)$$

$$\Delta M = -M^c \cos n(x - a). \quad (9.42)$$

#### 9.2.4. Bara dreaptă acționată în secțiunea $x = a$ de o sarcină uniform distribuită

Se consideră o bară dreaptă, figura 9.5, încărcată cu o sarcină uniform distribuită de intensitate  $q$ .

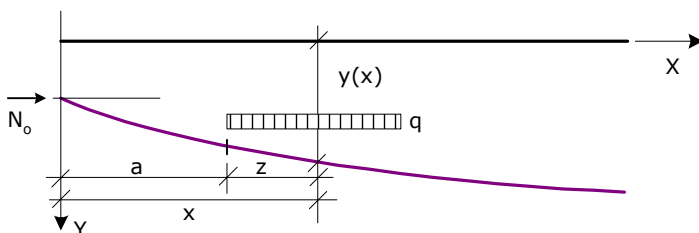


Fig. 9.5. Bara dreaptă acționată de o sarcină distribuită

Pentru a calcula eforturile și deplasările, din secțiunea „ $x$ ” a barei drepte, se aplică metodologia folosită în cazurile anterioare, rezultă:

$$\Delta y = \int_0^x \frac{qz}{n N_0} [n(x - a) - \sin(x - z)] dz \quad (9.43)$$

și

$$\Delta y = \frac{q}{n^2 EI} \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{1}{n^2} + \frac{\cos nx}{n^2} \right], \quad (9.44)$$

$$\Delta = \frac{q}{N} \left( x - \frac{\sin nx}{n} \right), \quad (9.45)$$

$$\Delta M = -\frac{q}{n^2} (1 - \cos nx). \quad (9.46)$$

Obs. În cazul în care o bară este încărcată concomitent cu un sistem de forțe alcătuit din parametrii în origine, o forță de intensitate  $Q$  (sau mai multe forțe concentrate), aplicată în secțiunea  $x=a$  (în secțiunile  $x_i=a_i$ ); săgeata, rotirea și momentul încovoietor într-o secțiune oarecare „ $x$ ” se determină prin suprapunerea efectelor. Astfel, se însumează relațiile: (9.33), (9.34) și respectiv (9.35), cu expresiile (9.37), (9.38) și, respectiv, (9.39). La fel se procedează în cazul în care pe lângă parametrii în origine bara este solicitată și de alte încărcări aplicate pe bară.

### 9.3. Aplicații

#### 9.3.1. Grinda simplu rezemată solicitată de un cuplu concentrat

Se consideră o grindă simplu rezemată acționată în extremitatea stângă de un cuplu concentrat, figura 9.6. Se cere să se determine rotirile secțiunilor din extremitățile grinzii, de pe reazemele „ $i$ ” și „ $j$ ”.

Prima etapă de calcul constă în determinarea reacțiunilor grinzii simplu rezemate. Aplicând condițiile de echilibru static se determină reacțiunile:

$$V_i = \frac{1}{l}, \quad V_j = \frac{1}{l}, \quad H_i = P.$$

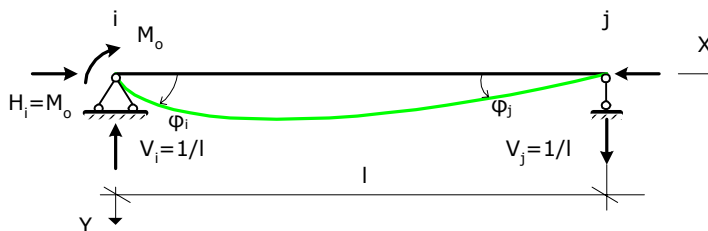


Fig.9.6. Grinda simplu rezemată acționată de un cuplu

În etapa a doua, se identifică parametrii în origine:

$$N_o = P, \quad T_o = -\frac{1}{l}, \quad M_o = l, \quad \phi_o = \phi_i = ?, \quad Y_o = 0.$$

Condiția de aflare a rotirii din secțiunea „ $i$ ” este:

$$x = l, \quad M_j = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi_0 = \Phi_i.$$

Pentru a aplica condiția de mai sus se utilizează relația (9.35), care exprimată în funcție de  $x = l$ , rezultă:

$$M_j(x = l) = 0, \quad EI n \Phi_0 \sin nl + \cos nl - \frac{1}{nl} \sin nl = 0. \quad (9.47)$$

Prin împărțirea ultimei ecuații (9.47) cu produsul  $nEI \sin nl$  se ajunge la expresia de calcul a rotirii din origine:

$$\Phi_0 = \frac{1}{n^2 l EI} - \frac{1}{n EI \operatorname{tg} nl}.$$

Relația de mai sus se înmulțește și se împarte cu produsul  $3l$ ; efectuând calculele și introducând factorul de compresiune determinat cu relația  $v = nl$ , se obține expresia rotirii  $\Phi_i$ :

$$\Phi_i = \Phi_0 = \frac{l}{3EI} \frac{3}{v} \left( \frac{1}{v} - \frac{1}{\operatorname{tg} v} \right), \quad (9.48)$$

$$\Phi_i = \frac{l}{3EI} \alpha, \quad (9.49)$$

unde parametrul  $\alpha$  se calculează cu relația:

$$\alpha = \frac{3}{v} \left( \frac{1}{v} - \frac{1}{\operatorname{tg} v} \right). \quad (9.50)$$

Rotirea din secțiunea „j” se află aplicând relația (9.37), care devine în condițiile date:

$$\Phi_j = \Phi_i \cos nl - \frac{M_0}{N_0} n \sin nl - \frac{T_0}{N_0} (1 - \cos nl) \quad (9.51)$$

sau

$$\Phi_i = \frac{l}{6EI} \beta, \quad (9.52)$$

unde

$$\beta = \frac{6}{v} \left( \frac{1}{\sin v} - \frac{1}{v} \right). \quad (9.53)$$

### 9.3.2. Grinda încastrat solicitată de o forță concentrată

Se consideră o grindă în consolă acționată în capătul liber de o forță concentrată,  $Q = 1$ , figura 9.7.

Se cere să se determine expresii pentru calculul săgeții și rotirii din extremitatea liberă a barei.

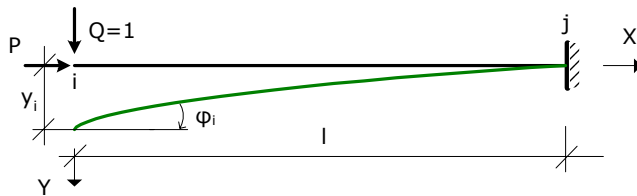


Fig. 9.7. Grinda încastrată acționată de o forță concentrată

În prima etapă de calcul se identifică parametrii în origine, aceștia sunt:

$$Y_o = ?, \quad \varphi_o = ?, \quad M_o = 0, \quad T_o = 1.$$

Pentru aflarea rotirii din extremitatea liberă a grinzii se folosește condiția de rotire nulă în reazemul încastrat,  $\varphi_j(x = l) = 0$ , se aplică relația (9.34), care în condițiile date devine:

$$\varphi_i \cos nl + \frac{1}{N_o} (1 - \cos nl) = 0.$$

De unde:

$$\varphi_i = -\frac{l^2}{2EI} \frac{2}{v^2} \frac{1 - \cos v}{\cos v}, \quad (9.54)$$

în care s-a introdus factorul de compresiune,

$$v = nl. \quad (9.55)$$

Săgeata  $y_i$  se deduce punând condiția  $y_j(x = l) = 0$ , se folosește relația (9.38) care, în condițiile impuse, îmbracă forma:

$$y_i + \frac{1}{n} \frac{1}{n^2 EI} \left( 1 - \frac{1}{\cos nl} \right) \sin nl + \frac{1}{n^3 EI} (nl - \sin nl) = 0.$$

De unde rezultă:

$$y_i = \frac{l^3}{3EI} \theta', \quad (9.56)$$

în care

$$\theta' = \frac{3(\operatorname{tg} v - v)}{v^3}. \quad (9.57)$$

# CAPITOLUL 10

## CALCULUL DEPLASĂRILOR ȘI RIGIDITĂȚILOR DE ORDINUL II

### 10.1 Metoda Mohr-Maxwell

Metoda Mohr-Maxwell pentru calculul deplasărilor presupune existența a două stări distincte:

- a. *starea reală* constituită din structura reală acționată de un sistem de forțe pentru care se cere să se afle deplasările diferitelor secțiuni ale structurii;
- b. *starea virtuală*, care se constituie prin acționarea structurii, luate în studiu, în secțiunea și pe direcția în care se dorește să se determine o deplasare, cu o forță egală cu unitatea. Acțiunea egală cu unitatea poate fi o forță concentrată

(pentru a determina deplasare liniară a secțiunii), un cuplu concentrat (pentru a calcula rotirea secțiunii), o sarcină distribuită de intensitate egală cu unitatea sau un cuplu distribuit de intensitate egală cu unitatea.

Relația de calcul este următoarea:

$$\Delta = \sum \int_0^l \frac{\bar{M}(x)M(x)}{EI} dx, \quad (10.1)$$

unde:  $\Delta$  reprezintă deplasarea care se dorește să se calculeze, poate fi o deplasare liniară sau o deplasare unghiulară;

$\bar{M}(x)$  - momentul încovoietor în secțiunea „x” produs de acțiunea egală cu unitatea aplicată în secțiunea în care se calculează deplasarea;

$M(x)$  - momentul încovoietor din secțiunea „x” produs de sistemul de forțe aplicat pe structură, în starea reală de solicitare;

$EI$  - modulul de rigiditate la solicitarea de încovoiere a secțiunii transversale.

În calculul de ordinul I, cele două diagrame de moment corespunzător stărilor reale și virtuale se trasează printr-un calcul de ordinul I, deci echilibrul forțelor este exprimat în raport cu poziția inițială, nedeformată a structurii

În calculul de ordinul II, cele două diagrame de moment încovoietor sunt diferite. Astfel, diagrama corespunzătoare stării virtuale este determinată printr-un calcul de ordinul I, iar diagrama de moment din starea reală, printr-un calcul de ordinul II, în acest din ultim caz, echilibrul forțelor este exprimat în raport cu poziția deformată a structurii.

Rezultă că relația de calcul are alura:

$$\Delta = \sum \int_0^l \frac{\bar{M}^I(x)M^{II}(x)}{EI} dx, \quad (10.2)$$

în care:  $\bar{M}^I(x)$  reprezintă momentul încovoietor virtual de ordinul I;

$M^{II}(x)$  - momentul din secțiunea „x” de ordinul II;

$EI$  - modulul de rigiditate la solicitarea de încovoiere;

$l$  - lungimea tronsonului pe care modulul de rigiditate la solicitarea de încovoiere este constant, iar cele două diagrame de moment încovoietor au aceeași lege de variație.

## 10.2. Aplicații. Calculul deplasărilor

### 10.2.1. Grinda simplu rezemată. Calculul deplasărilor de ordinul I

Se consideră o grindă simplu rezemată acționată de un cuplu concentrat aplicat pe sistem în extremitatea sa stângă. Se cere să se determine rotațiile:  $\varphi_i$  și  $\varphi_j$ , v. figura 10.1.

Deplasările unghiulare  $\varphi_i$  și  $\varphi_j$ , corespunzătoare secțiunilor extreme ale grinzii, se determină prin aplicarea relației (10.1), după metodologia prezentată la Statica construcțiilor.

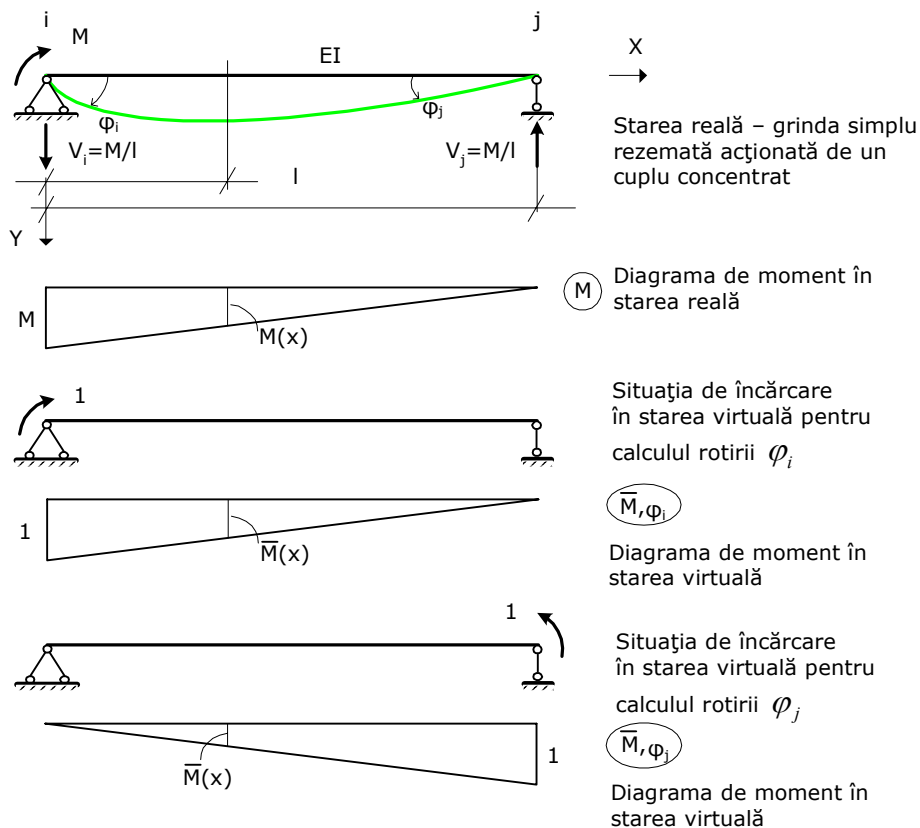


Fig.10.1. Grinda simplu rezemată acționată de un cuplu

Luând în considerare diagramele trasate în figura 10.1.b și d se determină rotația  $\varphi_i$ , iar prin integrarea diagramei din figura 10.1.b și f se calculează deplasarea unghiulară  $\varphi_j$ . Se obțin relațiile:

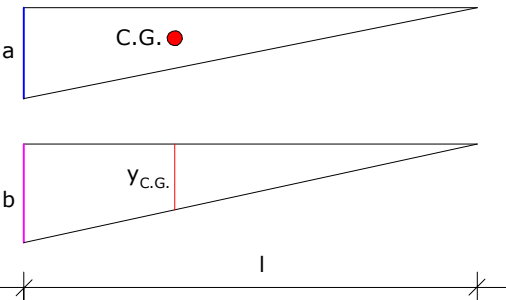
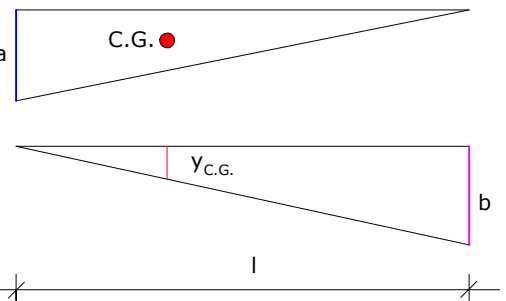
$$\varphi_i = \frac{l}{3EI} M \quad (10.3)$$

și

$$\varphi_j = \frac{l}{6EI} M. \quad (10.4)$$

Obs. Regula de rezolvare a integralei presupune înmulțirea suprafeței diagramei neliniare (din starea reală) cu ordonata din dreptul centrului de greutate al diagramei neliniare, măsurată în diagrama liniară (stare virtuală), tabelul 10.1.

Tab.10.1. Integrarea diagramei de eforturi

|                                                                                    |                         |                                                                                               |
|------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|
|   | $\Omega = \frac{al}{2}$ | $\int_0^l \frac{\bar{M}(x)M(x)}{EI} dx =$ $\frac{1}{EI} \Omega y_{C.G.} =$ $\frac{l}{3EI} ab$ |
|  | $\Omega = \frac{al}{2}$ | $\int_0^l \frac{\bar{M}(x)M(x)}{EI} dx =$ $\frac{1}{EI} \Omega y_{C.G.} =$ $\frac{l}{6EI} ab$ |

### 10.2.2. Grinda simplu rezemată. Calculul deplasărilor de ordinul II

Se consideră o grindă simplu rezemată acționată în extremitatea stângă cu un cuplu concentrat, figura 10.2. Se cere să se determine rotirile secțiunilor din dreptul celor două reazeme.

Luând în considerare metoda Mohr-Maxwell, relația (10.2) și metoda parametrilor în origine (v. aplicația 9.3.1, relațiile (9.49) și (9.50), respectiv (9.52) și (9.53), rezultă pentru deplasărilor unghiulare de ordinul II următoarele expresii de calcul:

$$\varphi_i = \frac{l}{3EI} Ma \quad (10.5)$$



și

$$\varphi_j = \frac{1}{6EI} M\beta. \quad (10.6)$$

Relațiile (10.5) și (10.6) au fost determinate prin multiplicarea expresiilor (9.49) respectiv (9.52) cu intensitatea cuplului concentrat,  $M$  (în aplicația 8.3.1,  $M=1$ ).

Obs. 1. Analizând rezultatele de mai sus se constată că metoda Mohr-Maxwell este o pseudo-metodă de calcul a deplasărilor de ordinul II. La fel ca în calculul de ordinul I se consideră diagramele de moment încovoietor din cele două stări reală și virtuală, însă, în calculul de ordinul II, rezultatul integrării diagramelor este egal cu cel determinat în calculul de ordinul I, dar multiplicat cu parametru  $\alpha$  (relația (10.5)), respectiv, cu parametru  $\beta$  (relația (10.6)).

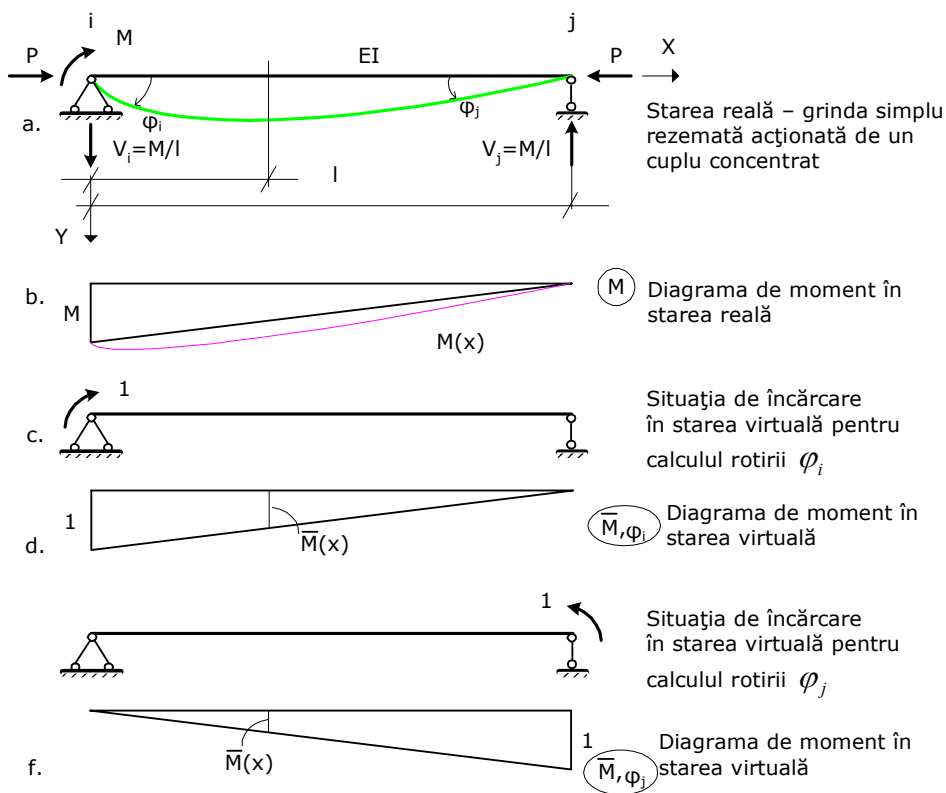


Fig.10.2. Grinda simplu rezemată acționată de un cuplu

Parametru  $\alpha$  se introduce când cele două diagrame de moment încovoietor, care se înmulțesc, sunt de forme triunghiulare având ordonatele alăturate, iar diagrama de moment din starea reală,

diagramă de ordinul II, cuprinde și o diagramă suplimentară de moment, produsă de forța axială corespunzătoare, având ordonatele nule în extremități.

În ceea ce privește parametru  $\beta$ , acesta se include în relația de calcul a deplasării când cele două diagrame de moment încovoietor de forme triunghiulare sunt cu ordonatele în extremități opuse, iar diagrama suplimentară din efort axial are ordonate nule în extremități.

2. S-a întocmit un tabel pentru calculul integralelor în cazul determinării deplasărilor de ordinul II, tabelul 10.2 (asemănător cu tabelul 10.1, corespunzător calculului deplasărilor de ordinul I).

Tabelul 10.2. Integrarea diagramelor de eforturi

|  |                            |                                                                                                      |
|--|----------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  | $\Omega = \frac{al}{2}$    | $\int_0^l \frac{\bar{M}(x)M(x)}{EI} dx =$ $\frac{1}{EI} \Omega y_{C.G.} =$ $\frac{l}{3EI} a b a$     |
|  | $y_{C.G.} = \frac{2}{3} b$ |                                                                                                      |
|  | $\Omega = \frac{al}{2}$    | $\int_0^l \frac{\bar{M}(x)M(x)}{EI} dx =$ $\frac{1}{EI} \Omega y_{C.G.} =$ $\frac{l}{6EI} a b \beta$ |
|  | $y_{C.G.} = \frac{1}{3} b$ |                                                                                                      |

### 10.2.3. Grinda încastrată. Calculul deplasărilor de ordinul I

Se consideră o grindă în consolă acționată de o forță concentrată, figura 10.3. Se cere să se determine săgeata produsă în capătul liber de către forța concentrată. Aplicând relația (10.1) și regula de integrare din tabelul 10.1 rezultă:

$$y_j = \frac{l^3}{3EI} Q. \quad (10.7)$$

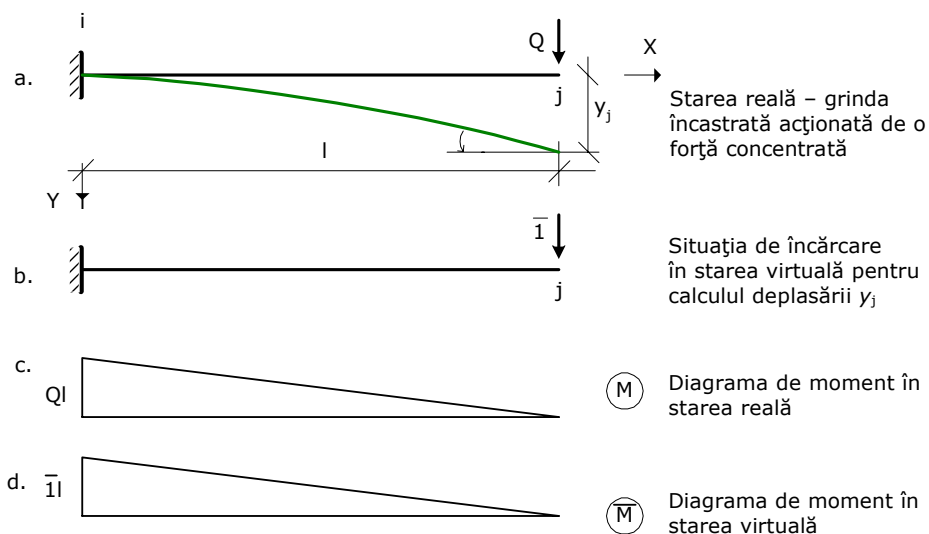


Fig.10.3. Grinda încastrată. Calculul săgeții de ordinul I

#### 10.2.4. Grinda încastrată. Calculul deplasărilor de ordinul II

În figura 10.4 se prezintă o grindă încastrată acționată de o forță concentrată, de intensitate  $Q$  și o altă forță concentrată  $P$  aplicată pe

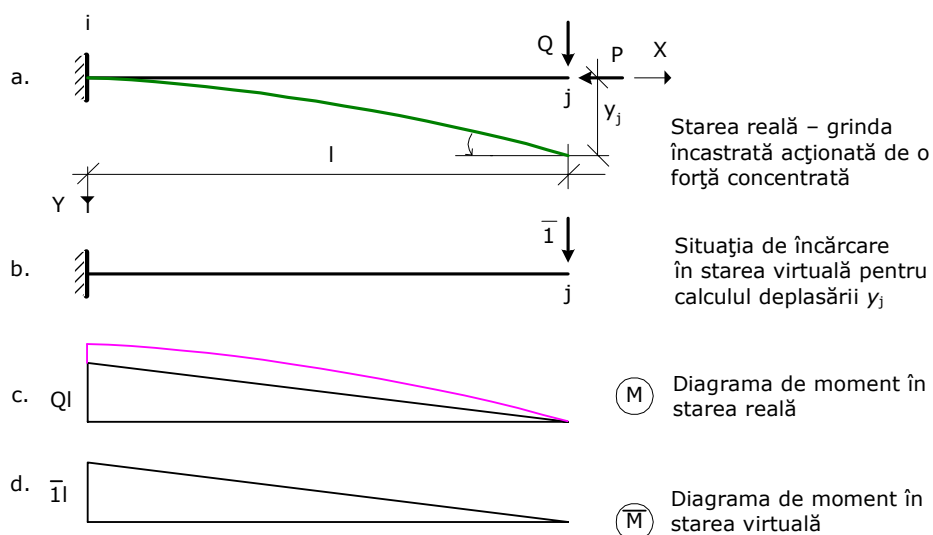


Fig.10.4. Grinda încastrată. Calculul săgeții de ordinul II

direcția axei OX. Se cere să se determine săgeata din extremitatea liberă a grinzii, printr-un calcul de ordinul II.

Săgeata se calculează aplicând metoda Mohr-Maxwell specifică calculului de ordinul I, iar rezultatul se multiplică cu parametru  $\theta'$ , în conformitate cu modul de aplicare a metodei parametrilor în origine (v. aplicația 9.3.2 și relațiile (9.55) și (9.56). Rezultă următoarea relație:

$$y_j = \frac{l^3}{3EI} Q\theta' \quad (10.8)$$

În care

$$\theta' = \frac{3(\operatorname{tg} v - v)}{v^3}. \quad (10.9)$$

Prin urmare, regula de înmulțire a două triunghiuri, ca cele din figura 10.5 ne conduce la relația următoare:

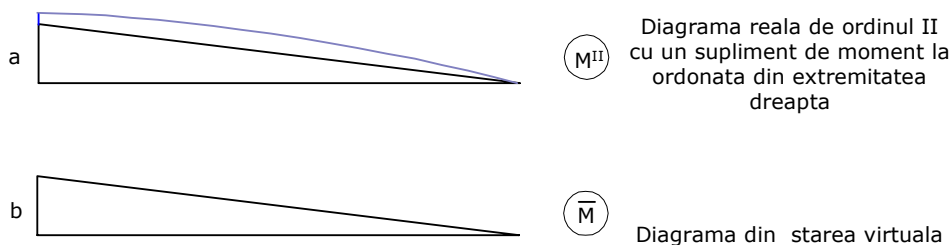


Fig.10.5. Diagrame de moment încovoietor

$$\Delta = \frac{l}{3EI} ab\theta'. \quad (10.10)$$

### 10.2.5. Integrarea a două diagrame de forme trapezoidale

În cazul unor structuri complexe rezultă pe unele bare diagrame de moment încovoietor de forme trapezoidale, de tipul celor din figura 10.6:  $M^{II}$  – diagramă de ordinul II având supliment de moment încovoietor (în extremitatea dreaptă, aici) produsă de influența forței axiale și  $\bar{M}$  – diagramă de ordinul I.

Regula de integrare a celor două diagrame,  $M^{II}$  și  $\bar{M}$ , ca cele din figura 10.6, constă din descompunerea în diagrame triunghiulare, notate pe figură prin A și B, respectiv C și D și aplicând regulile expuse în tabelele 10.1 și 10.2 și consecințele metodei parametrilor în origine. Toate aceste operații se efectuează pentru a se putea aplica pseudo-metoda Mohr-Maxwell, cu multiple avantaje în cazul cadrelor alcătuite din bare drepte.

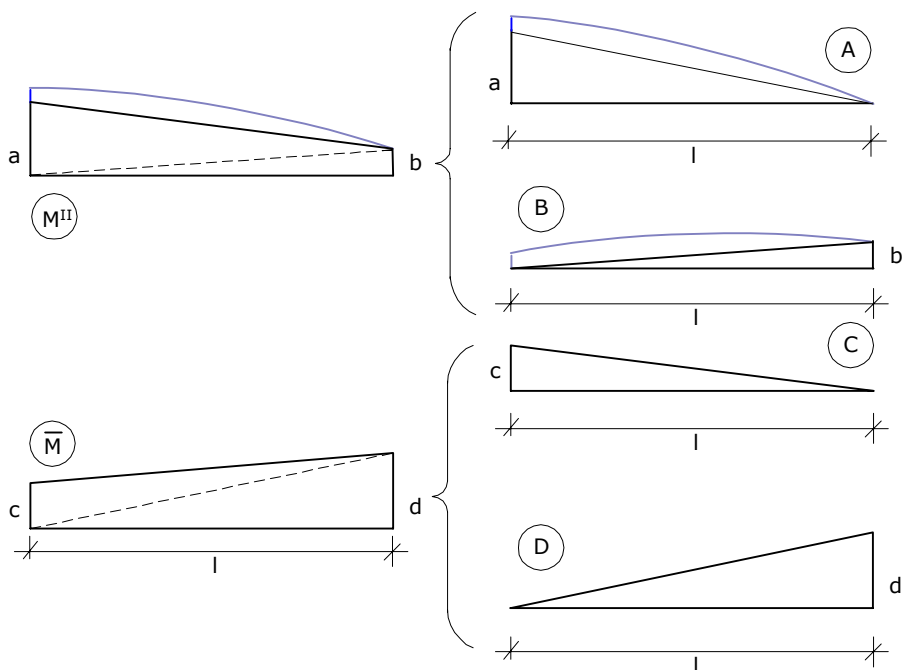


Fig.10.6. Diagrame de moment incovoietor

În consecință, rezultatul integrării celor două diagrame:  $M^{\text{II}}$  și  $\bar{M}$ , aplicând regula lui Mohr-Maxwell se află în modul următor:

$$\Delta = \int_0^l \frac{\bar{M}(x)M^{\text{II}}(x)}{EI} dx = \int_0^l \frac{(C+D)(A+B)}{EI} dx$$

și

$$\Delta = \int_0^l \frac{AC}{EI} dx + \int_0^l \frac{AD}{EI} dx + \int_0^l \frac{BC}{EI} dx + \int_0^l \frac{BD}{EI} dx$$

sau

$$\Delta = \frac{l}{3EI} ac\theta' + \frac{l}{6EI} ad\theta + \frac{l}{6EI} bc\theta + \frac{l}{3EI} bd\theta'', \quad (10.10)$$

unde parametrii  $\theta$  și  $\theta''$  se determină cu relațiile:

$$\theta = \frac{6}{v^2} \left( \frac{1}{\cos v} - \frac{\operatorname{tg} v}{v} \right) \quad (10.11)$$

și

$$\theta'' = \frac{3}{v^2} \left( 1 + \frac{\operatorname{tg} v}{v} + v \operatorname{tg} v - \frac{2}{\cos v} \right). \quad (10.12)$$

### 10.2.6. Grinda simplu rezemată acționată de o sarcină distribuită. Calculul deplasărilor de ordinul II

În figura 10.7 este prezentată grinda simplu rezemată încărcată cu o sarcină uniform distribuită. Se cere să se determine rotirile de ordinul II ale secțiunilor extreme ale grinzii.

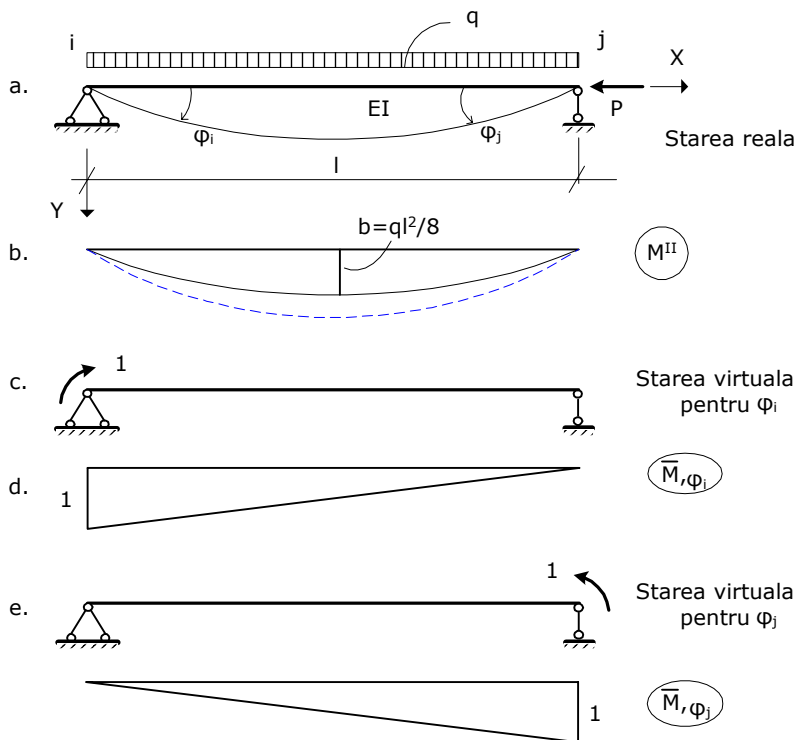


Fig.10.7. Grinda simplu rezemată acționată de o sarcină uniform distribuită

Datorită simetriei cele două deplasări unghiulare ale extremităților grinzii sunt egale. Se aplică pseudo-relația lui Mohr-Maxwell, integrând două diagrame (una de ordinul II, figura 10.7.b și alta de ordinul I, figura 10.7.d), după regula de înmulțire a două diagrame în formă de triunghi cu ordonatele alăturate: lungimea triunghiului împărțită la produsul  $3EI$ , fracția multiplicată cu ordonatele celor două diagrame și cu parametru  $q_p$ . Acest rezultat este identic cu cel care se obține prin aplicarea metodei parametrilor în origine (v. capitolul 9).

Rezultatul integrării este următorul:

$$\varphi_i = \varphi_j = \frac{l}{3EI} 1 \cdot b \cdot a_p \quad (10.12)$$

unde:

$$a_p = \frac{24}{v^2} \left( \operatorname{tg} \frac{v}{2} - \frac{v}{2} \right). \quad (10.13)$$

### 10.3. Calculul rigidităților de ordinul II la bara dreaptă

Statica construcțiilor a definit și calculat rigiditățile de ordinul II pentru o bară dreaptă, pe două tipuri de grinzi: grinda dublu încastrată și grinda încastrată - simplu rezemată (articulată).

Rigiditatea la rotire se definește prin momentul încovoietor care ia naștere în extremitatea unei grinzi, static nedeterminată, când în încastrarea din aceeași extremitate se produce o cedare de reazem - deplasare unghiulară egală cu unitatea.

Rigiditatea la deplasare reprezintă momentul încovoietor din extremitatea unei grinzi static nedeterminată care ia naștere atunci când axa barei se rotește cu o unitate (prin cedarea unui reazem - deplasare liniară perpendiculară pe axa inițială a barei) sau când cedarea unui reazem este o deplasare liniară egală cu unitatea.

#### 10.3.1. Rigiditatea la rotire a grinzii dublu încastrate.

Se consideră o grindă dublu încastrată acționată în reazemul din extremitatea stângă a barei, figura 10.8, cu o rotire egală cu unitatea. Se cere să se determine rigiditatea la rotire,  $K_{ij}$ .

Grinda fiind, în cazul acesta, de două ori static nedeterminată, sistemul de ecuații de echilibru, în metoda forțelor, este următorul:

$$\begin{aligned} \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 &= \Delta_{1c} \\ \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 &= \Delta_{2c} \end{aligned} \quad (10.14)$$

unde:

$$\delta_{11} = \int_0^l \frac{\overline{M}_1(x)M_1^{II}}{EI} dx = \frac{l}{3EI} \alpha. \quad (10.15)$$

$$\delta_{12} = \int_0^l \frac{\overline{M}_1(x)M_2^{II}}{EI} dx = \frac{l}{6EI} \beta, \quad (10.16)$$

$$\delta_{22} = \int_0^l \frac{\overline{M}_2(x)M_2^{II}}{EI} dx = \frac{l}{3EI} \alpha, \quad (10.17)$$

$$\Delta_{ic} = \pm l\Delta_i \pm \sum R_k^i \Delta_k \quad (10.18)$$

și rezultă, aplicând relația (10.18), pentru grinda luată în studiu:

$$\Delta_{lc} = 1.$$

$$(10.19)$$

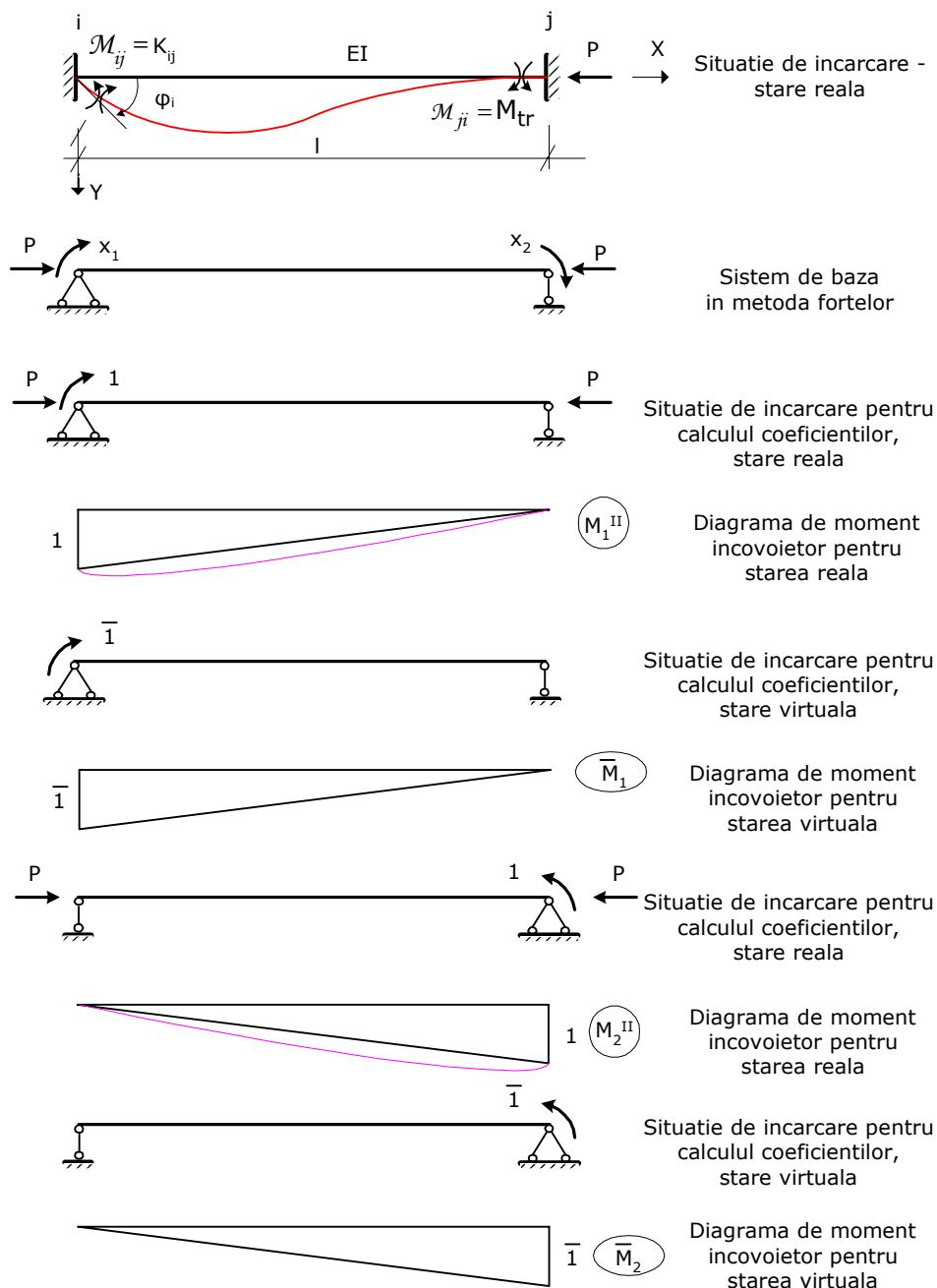


Fig.10.8. Grinda dublu încastrată - calculul rigidității la rotire



și 
$$\Delta_{2c} = 0 . \quad (10.20)$$

Introducând expresiile coeficienților și termenilor liberi (relațiile: (10.15), (10.16), (10.17), (10.19) și (10.20) în sistemul de ecuații de condiție (10.14) și rezolvând sistemul de ecuații se obțin soluțiile:

$$x_1 = \frac{4EI}{l} \frac{3a}{4a^2 - 3\beta^2} \quad (10.21)$$

și

$$x_2 = \frac{2EI}{l} \frac{3\beta}{4a^2 - 3\beta^2} \quad (10.22)$$

sau:

$$K_{ij} = x_1 = \frac{4EI}{l} K' , \quad (10.23)$$

unde:

$$K' = \frac{3a}{4a^2 - 3\beta^2} \quad (10.24)$$

și

$$M_{tr} = -x_2 = \frac{2EI}{l} K'' , \quad (10.25)$$

în care:

$$K'' = \frac{3\beta}{4a^2 - 3\beta^2} . \quad (10.26)$$

În relațiile (10.23) și (10.25),  $K_{ij}$  reprezintă rigiditatea la rotire a barei dublu încastrate  $ij$ , iar  $M_{tr}$  reprezintă momentul transmis din extremitatea  $i$ , unde se produce cedarea de reazem egală cu unitatea, în extremitatea  $j$ , a barei  $ij$ .

Factorul de transmitere, notat  $t_{ij}$ , se calculează cu relația:

$$t_{ij} = \frac{M_{tr}}{K_{ij}} \quad (10.27)$$

sau

$$t_{ij} = 0.5 \frac{\beta}{a} . \quad (10.28)$$

### 10.3.2. Rigiditatea la deplasare a grinzii dublu încastrate.

Se consideră o grindă dublu încastrată acționată în reazemul din extremitatea dreaptă a barei, figura 10.9, cu o cedare de reazem,

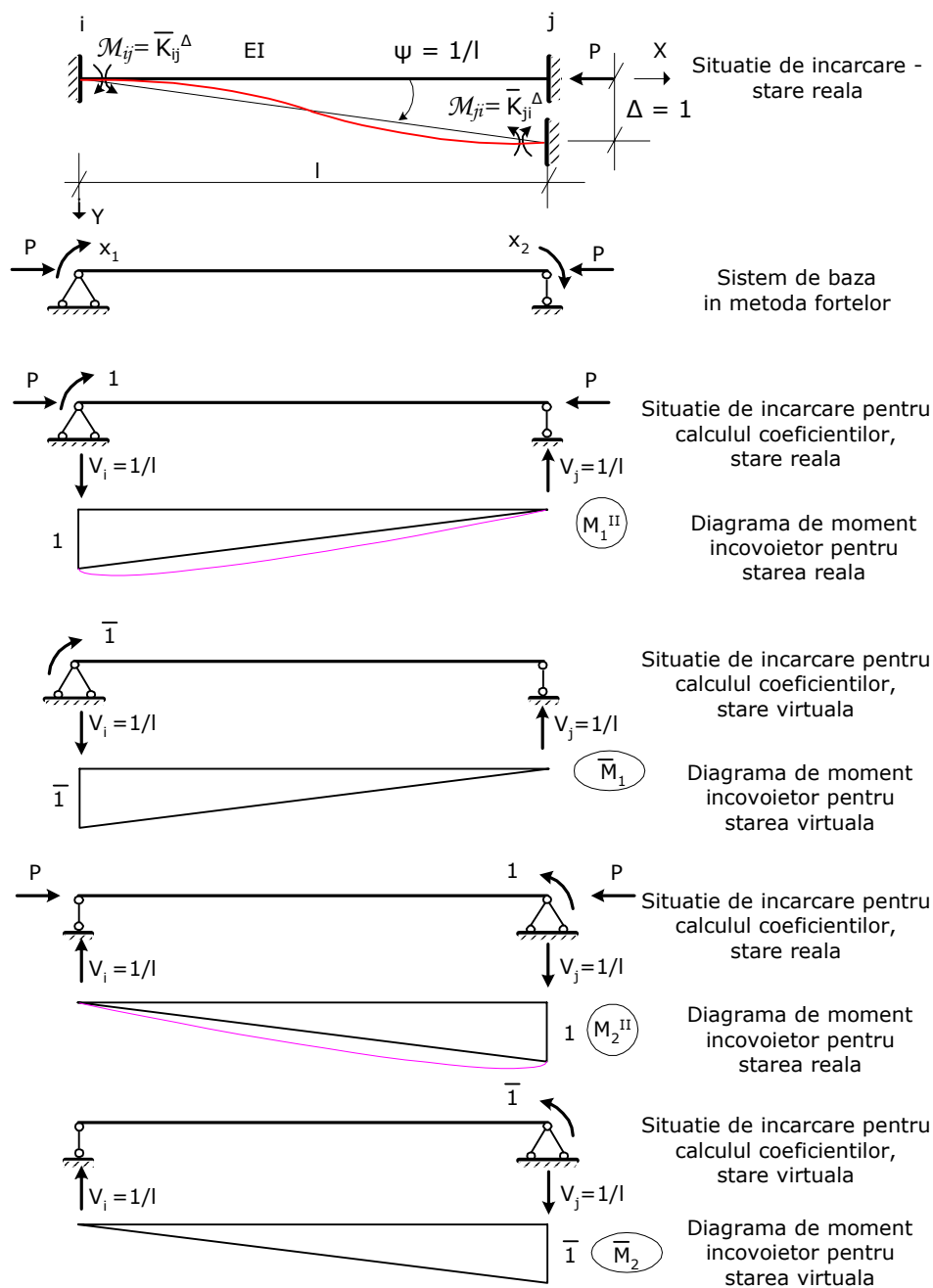


Fig. 10.9. Grinda dublu încastrată - calculul rigidității la deplasare

deplasare liniară, perpendiculară pe axa inițială a bare, egală cu unitatea. Se cere să se determine rigiditatea la deplasare,  $\overline{K}_{ij}$ .

Problema se rezolvă prin metoda forțelor. Sistemul de ecuații de condiție este identic cu cel prezentat la numărul (10.14). Coeficienții, după cum rezultă din analiza diagramelor de moment încovoietor desenate în figura 10.9, sunt identici cu cei calculați la problema precedentă, relațiile: (10.15), (10.16) și (10.17). Termenii liberi se calculează cu relația (10.18), reacțiunile  $R_k^i$  sunt calculate pe figura menționată, rezultă:

$$\Delta_{1c} = -\frac{1}{l} \quad (10.29)$$

și

$$\Delta_{2c} = \frac{1}{l}. \quad (10.30)$$

Rezolvând sistemul de ecuații (10.14) luând în considerare expresiile coeficienților, relațiile: (10.15), (10.16) și (10.17) și termenii liberi, expresiile: (10.29) și (10.30), se deduc soluțiile problemei:

$$x_1 = x_2 - \frac{6EI}{l^2} K. \quad (10.31)$$

Rezultă, pentru grinda dublu încastrată, rigiditățile la deplasare determinate cu relația:

$$\overline{K}_{ij}^A = \overline{K}_{ji}^A = \frac{6EI}{l^2} K \quad (10.32)$$

unde:

$$K = \frac{1}{2\alpha - \beta}. \quad (10.33)$$

Obs. Rigiditățile la rotire și deplasare ale grinzii dublu încastrate sunt prezentate în tabelul 10.4., iar pentru grinda încastrată – simplu rezemată în tabelul 10.5.

#### **10.4. Momentele de încastrare perfectă de ordinul II ale grinzii dublu încastrate**

Se consideră o grindă dublu încastrată acționată de o sarcină uniform distribuită de intensitate  $q$ , figura 10.10. Se cere să se determine momentele de încastrare perfectă,  $M_{ij}$  și  $M_{ji}$ , momentele încovoietoare din secțiunile extremităților grinzii.

Grinda fiind, în cazul acesta, de două ori static nedeterminată, sistemul de ecuații de echilibru, în metoda forțelor, este următorul:

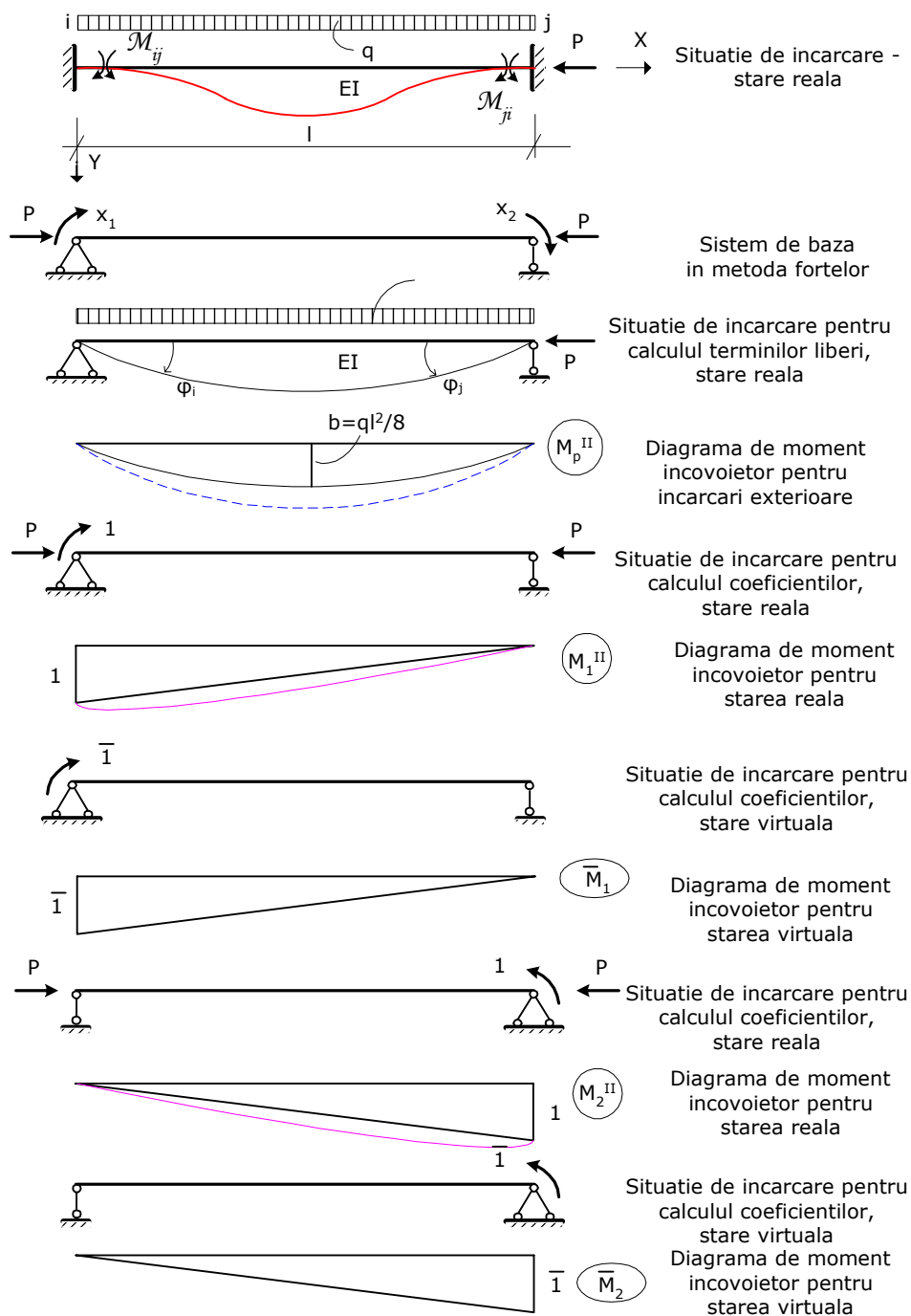


Fig.10.10. Grinda dublu încastrată – calculul momentelor de încastrare perfectă

$$\begin{aligned}\delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \Delta_{1p} &= 0 \\ \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \Delta_{2p} &= 0\end{aligned}\quad (10.34)$$

Coeficienții, după cum rezultă din analiza diagramelor de moment încovoietor desenate în figura 10.10, sunt identici cu cei calculați la problema de la paragraful 10.3.1, relațiile: (10.15), (10.16) și (10.17).

Termenii liberi se determină folosind relația de calcul:

$$\Delta_{ip} = \sum \int_0^l \frac{\overline{M}_i^I(x) M_p^{II}(x)}{EI} dx, \quad (10.35)$$

care aplicată în cazul problemei considerate în studiu și luând în considerare diagramele trasate în figura 10.1 conduce la următoarele relații de calcul pentru termenii liberi ai sistemului de ecuații:

$$\Delta_{ip} = \frac{ql^3}{24EI} a_p. \quad (10.36)$$

Cunoscând relațiile de calcul ale coeficienților și termenilor liberi se poate rezolva sistemul de ecuații (10.34). Soluția sistemului este:

$$x_1 = -x_2 = -\frac{ql^2}{12} \mu, \quad (10.37)$$

unde:

$$\mu = \frac{48}{v^3} \left( \operatorname{tg} \frac{v}{2} - \frac{v}{2} \right) \left( K' - \frac{1}{2} K'' \right). \quad (10.38)$$

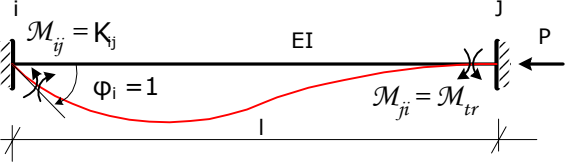
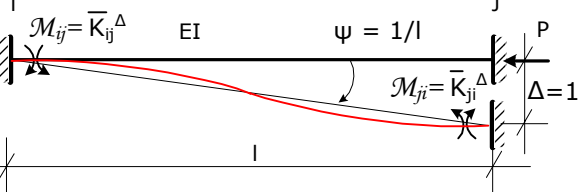
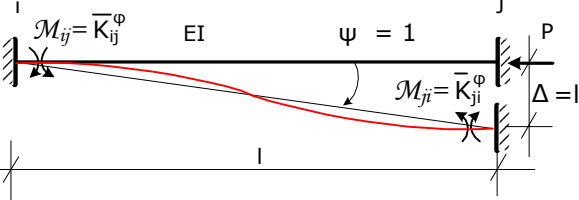
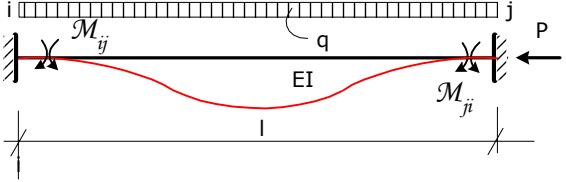
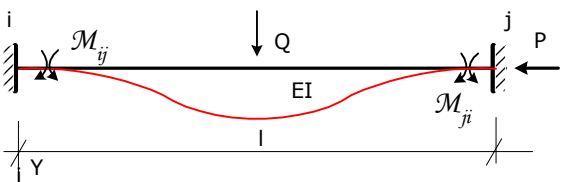
iar parametrii  $K'$  și  $K''$  se calculează cu formulele (10.24) și (10.26).

Cum momentele de încastrare perfectă se identifică cu necunoscutele sistemului de ecuații rezultă că acestea se determină cu relațiile:

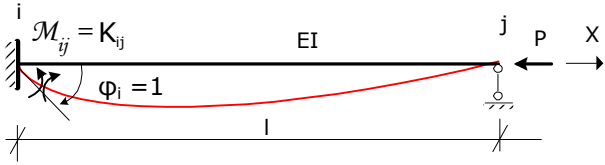
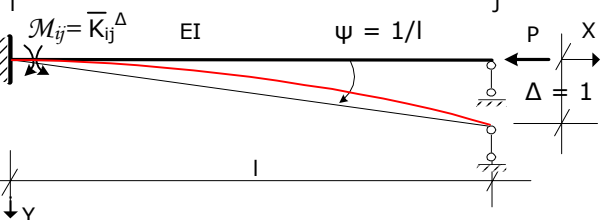
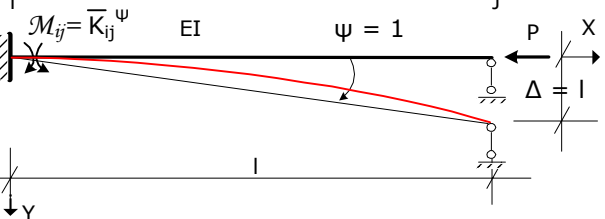
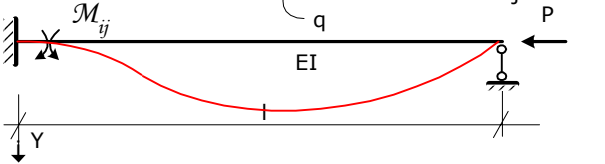
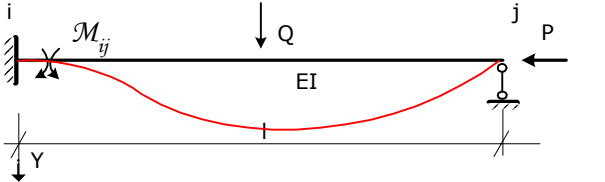
$$M_{ij} = M_{ji} = \frac{ql^2}{12} \mu. \quad (10.39)$$

Obs. Relațiile de calcul ale momentelor de încastrare perfectă ale grinzii dublu încastrate sunt prezentate în tabelul 10.4, iar pentru grinda încastrată – simplu rezemată, în tabelul 10.5.

Ta. 10.4. Rigidități și momente de ordinul II ale grinzii dublu încastrate

|                                                                                     |                                                                                                                                                                      |
|-------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|    | $K_{ij} = \frac{4EI}{l} K'$ $K' = \frac{3a}{4a^2 - 3\beta^2}$ $M_{tr} = \frac{2EI}{L} K''$ $K'' = \frac{3\beta}{4a^2 - 3\beta^2} \quad t_{ij} = 0.5 \frac{\beta}{a}$ |
|    | $\bar{K}_{ij}^{\Delta} = \bar{K}_{ji}^{\Delta} = \frac{6EI}{l^2} K$ $K = \frac{1}{2a - \beta}$                                                                       |
|   | $\bar{K}_{ij} = \bar{K}_{ji} = \frac{6EI}{l} K$ $K = \frac{1}{2a - \beta}$                                                                                           |
|  | $M_{ij} = M_{ji} = \frac{ql^2}{12} \mu$ $\mu = \frac{48}{v^3} \left( \operatorname{tg} \frac{v}{2} - \frac{v}{2} \right) \left( K' - \frac{1}{2} K'' \right)$        |
|  | $M_{ij} = M_{ji} = \frac{Ql}{8} \mu$ $\mu = \frac{16}{v^2} \left( \frac{1}{\cos \frac{v}{2}} \right) \left( K' - \frac{1}{2} K'' \right)$                            |

Ta. 10.5. Rigidități și momente de ordinul II ale grinzii încastrată-simplu rezemată

|                                                                                     |                                                                                                                               |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|    | $K_{ij} = \frac{3EI}{l} K^0$ $K^0 = \frac{1}{a}$ $a = \frac{3}{v} \left( \frac{1}{v} - \frac{1}{\operatorname{tg} v} \right)$ |
|    | $\bar{K}_{ij}^{\Delta} = \frac{3EI}{l} k^0$ $K^0 = \frac{1}{a}$                                                               |
|   | $\bar{K}_{ij}^{\psi} = \frac{3EI}{l} k^0$ $K^0 = \frac{1}{a}$                                                                 |
|  | $M_{ij} = M_{ji} = \frac{ql^2}{8} \mu$ $\mu = \frac{24}{v^3} k^0 \left( \operatorname{tg} \frac{v}{2} - \frac{v}{2} \right)$  |
|  | $M_{ij} = M_{ji} = \frac{3Ql}{16} \mu$ $\mu = \frac{8}{v^2} k^0 \left( \frac{1}{\cos \frac{v}{2}} \right)$                    |

# CAPITOLUL 11

## CALCULUL DE STABILITATE A CADRELOR UTILIZÂND MATRICEA DE FLEXIBILITATE

### 11.1. Ecuația de stabilitate

Ecuația de stabilitate în metoda forțelor se obține prin anularea determinantului matricei coeficienților. Matricea coeficienților identică cu matricea de flexibilitatea a structurii are forma următoare:

$$[\delta_{ij}] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & - & - & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & - & - & \delta_{2n} \\ - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & - & - & \delta_{nn} \end{bmatrix} \quad (11.1)$$



Un coeficient al acestei matrice se determină cu relația:

$$\delta_{ij} = \int_0^l \frac{\overline{M}_i(x) M_j^{II}}{EI} dx. \quad (11.2)$$

În conformitate cu relația (11.2) și cu cele precizate în cursul numărului 10, privitor la calculul deplasărilor, rezultă că  $\delta_{ij}$  este o funcție de factorul de compresiune  $v$ , care se determină cu formula:

$$v = l \sqrt{\frac{N}{EI}}, \quad (11.3)$$

unde  $N$  reprezintă forța axială dintr-o bară a structurii, iar produsul  $EI$  - rigiditatea la solicitarea de încovoiere, iar factorul de compresiune intervine prin intermediul parametrilor  $\alpha, \beta, \theta, \theta'', \theta'$  etc.

Ecuția de stabilitate are forma:

$$\det(\delta_{ij}) = 0. \quad (11.4)$$

### 11.2. Etape în calculul de stabilitatea a cadrelor

În vederea efectuării unui calcul de stabilitate, a unui cadru, se parcurg următoarele etape de calcul:

- Se realizează un calcul de ordinul I pentru a afla eforturile axiale din barele structurii. Nu se iau în considerare decât eforturile de compresiune;
- Se calculează factorii de compresiune pentru barele structurii, aplicând relația (11.3), care ia forma:

$$v_{ij} = l_{ij} \sqrt{\frac{N_{ij}}{EI_{ij}}}; \quad (11.5)$$

- Se depistează factorul de compresiune maxim și funcție de acest factor se exprimă ceilalți factori de compresiune. Dacă notăm factorul de compresiune maxim cu " $v$ " sau " $v_{\max}$ ", atunci ceilalți factori de compresiune se determină funcție de acesta astfel:

$$v_{ij} = v \frac{l_{ij}}{l} \sqrt{\frac{N_{ij}}{N} \frac{EI}{EI_{ij}}}, \quad (11.6)$$

unde  $v$  se calculează cu relația (11.3).

Se alege un sistem de bază, corespunzător metodei forțelor, format din bare dublu articulate (simplu rezemate) și/sau console (grinda încastrată).

Obs. Această restricție este impusă de faptul că am evidențiat modalități și relații de calcul pentru deplasări (să aplicăm relația Mohr-Maxwell), numai în cazurile specifice grinzii dublu articulate și grinda încastrată;

- d) Se trasează diagramele de moment încovoietor pe sistemul de bază ales, în cele două stări: starea reală (diagrame de ordinul II) și starea virtuală (diagrame de moment de ordinul I);
- e) Se calculează coeficienții  $\delta_{ij}$  aplicând relația (11.2) după regulile precizate în capitolul numărul 10;
- f) Se determină ecuația de stabilitate prin anularea determinantului coeficienților, relația (10.4);
- g) Se caută, prin încercări, soluția ecuației de stabilitate.

Obs.:

1. Pentru găsirea soluției ecuației de stabilitate,  $v_{cr}$ , factorul de compresiune critică, se vor impune, succesiv, valori factorului de compresiune,  $v$ , care introdus în ecuația de stabilitate trebuie să verifice aceasta ecuație. Prima valoare impusă pentru factorul de compresiune se calculează cu relația:

$$v = v_{cr} = \frac{n}{Y}, \quad (11.8)$$

unde:

$$Y = \frac{l_f}{l}, \quad (11.9)$$

în care:  $l_f$  reprezintă lungimea de flambaj a barei etalon, bara cu factorul de compresiune maxim,

$l$  - lungimea barei etalon.

2. Parametrul  $Y$  se determină în funcție de tipul de legături existente în extremitățile barei etalon, astfel determinăm cu ajutorul relației (11.9) următoarele valori:
  - a.  $Y = 0.5$  pentru grinda dublu încastrată;
  - b.  $Y = 0.707$  în cazul grinzii încastrate – simplu rezemată;
  - c.  $Y = 1$  pentru grinda dublu articulată sau articulată – simplu rezemată;
  - d.  $Y = 2$  pentru grinda încastrată (în consolă).
2. În ecuația de stabilitate se regăsește factorul de compresiune maxim, al barei etalon. Această bară, prin modul de deformare sub acțiunea încărcărilor, se compară cu cele patru tipuri de bară, pentru care avem calculate valorile parametrului  $Y$ . De regulă, bara etalon se situează între două tipuri de bară și atunci pentru a se determina valoarea

parametrului  $\gamma$  se efectuează o interpolare sau se ia media valorilor corespunzătoare celor două tipuri de bară. Cu această valoare, astfel aflată, se începe iterația pentru determinarea soluției ecuației de stabilitate.

3. În mod firesc, determinantul, pentru valoarea parametrului  $\gamma$  propusă, nu se va anula. Va rezulta, pentru determinant, o valoare pozitivă (sau negativă). Se consideră, pentru cea de a doua etapă a iterației, o altă valoare pentru parametrul  $\gamma$ , care să ne conducă la o valoare a determinantului negativă (sau pozitivă). Următoarea valoare a parametrului  $\gamma$  pe care o verificăm în ecuația de stabilitate este valoarea media a celor două valori ale parametrului  $\gamma$ , utilizate în primele două etape ale iterației (cele care au condus la valorile pozitive sau negative ale determinantului).
4. Cum pentru a determina rezultatul ecuației de stabilitate vor rezulta două valori: una pozitivă, notată,  $A$  și una negativă, notată  $B$ , iterația se oprește atunci când eroarea relativă satisface relația:

$$\varepsilon_r \% = \frac{A - B}{A} 100 < 0.1. \quad (11.10)$$

5. Valoarea factorului de compresiune  $\nu$ , care a condus la rezultatul relației (11.10), se consideră valoarea factorului de compresiune critic.
- i) Cunoscând valoarea factorului de compresiune critic se determină direct valoarea forței axiale critice,  $N_{cr}$  și, firesc, încărcarea critică  $P_{cr}$ . Conform relației (11.3) rezultă:

$$N_{cr} = \frac{\nu_{cr}^2 EI}{l^2} \quad (11.11)$$

și

$$P_{cr} = f(N_{cr}), \quad (11.12)$$

deoarece prin intermediul calculului de ordinul I a rezultat că forța axială este funcție de încărcarea exterioară,  $P$ :

$$N = f(P), \quad (11.13)$$

unde  $P$  reprezintă intensitatea încărcării aplicate pe structură.

### 11.3. Aplicații

#### 11.3.1. Calculul de stabilitate al unui cadru static nedeterminat cu noduri fixe

Se consideră cadrul din figura 11.1 pentru care se cere să se determine încărcarea critică de pierdere a stabilității, prin metoda forțelor.

În vederea soluționării problemei, se vor aplica etapele de calcul expuse în paragraful 11.2, după cum urmează.

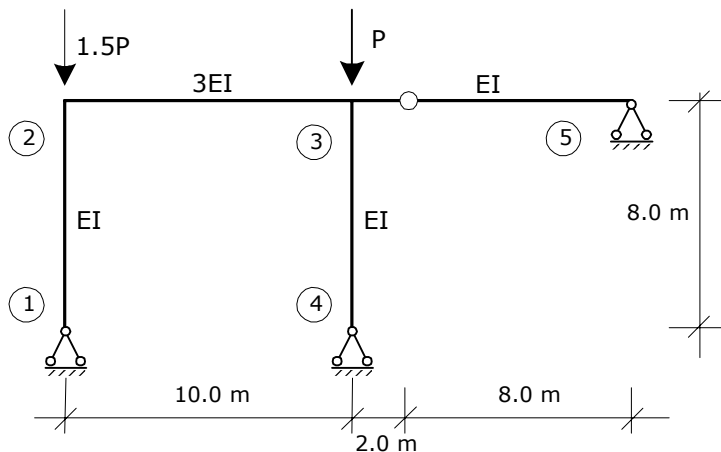


Fig. 11. 1. Cadru static nedeterminat. Calcul de stabilitate.

- a) Determinarea eforturilor axiale de ordinul I din barele structurii.

Analizând structura propusă pentru studiu se constată că este de două ori static nedeterminată,  $GNS = 2$ , iar datorită faptului că forțele exterioare sunt aplicate în nodurile structurii, cu direcțiile coincidând cu axele stâlpilor, nu mai este necesar să efectuăm un calcul de ordinul I pentru a afla eforturile axiale din barele cadrului. Eforturile axiale sunt evidente:

$$N_{12} = 1.5P \quad (11.14)$$

$$N_{34} = P,$$

iar în restul barelor eforturile sunt nule.

- b) Calculul factorilor de compresiune,  $v_{ij}$ .

Se folosește relația (11.5). Luând în considerare caracteristicile geometrice și fizice ale barelor structurii și eforturile axiale determinate în etapa precedentă rezultă:

$$v_{12} = l_{12} \sqrt{\frac{N_{12}}{EI_{12}}} = 8 \sqrt{\frac{1.5P}{EI}} = 9.8 \sqrt{\frac{P}{EI}} \quad (11.15)$$

$$v_{34} = l_{34} \sqrt{\frac{N_{34}}{EI_{34}}} = 8 \sqrt{\frac{P}{EI}}.$$

- c) Exprimarea factorilor de compresiune funcție de factorul de compresiune maxim.

Comparând cei doi factori de compresiune rezultă că cel al barei 12 este cel maxim, iar bara devine bara etalon pentru structură. Prin urmare:

$$v_{12} = v_{\max} \quad (11.16)$$

și

$$v_{34} = 0.8165 v_{\max}, \quad (11.17)$$

deoarece

$$\frac{8}{9.8} = 0.8165.$$

- d) Alegerea sistemului de bază.

În conformitate cu cele precizate în paragraful 11.2 sistemul de bază, în acest caz, este un sistem static determinat, prin suprimarea a celor două legături suplimentare, care au fixat și gradul de nedeterminare statică a structurii. Sistemul de bază este prezentat în figura 11.2 fiind alcătuit din bare dublu articulate.

- e) Trasarea diagramelor unitare de moment încovoietor.

Diagramele unitare sunt trasate și prezentate în figura 11.3, în două stări de încărcare corespunzătoare stării virtuale, diagrame de eforturi de ordinul I și stării reale, diagrame de eforturi de ordinul II.

- f) Calculul coeficienților,  $\delta_{ij}$ .

Coeficienții se determină aplicând pseudo-metoda Mohr-Maxwell, relația (10.2). Se obțin următoarele relații de calcul:

$$\delta_{11} = \sum \frac{\overline{M}_1(x) M_1^{II}}{EI} dx = \frac{8}{3EI} 1 \cdot 1 \cdot a_{12} + \frac{10}{3 \cdot 3EI} 1 \cdot 1,$$

$$\delta_{12} = \sum \frac{\overline{M}_1(x) M_2^{II}}{EI} dx = \frac{10}{6 \cdot 3EI} 1 \cdot 1 = \frac{5}{9EI}$$

și

$$\delta_{22} = \sum \frac{\overline{M}_2(x) M_2^{II}}{EI} dx = \frac{10}{3 \cdot 3EI} 1 \cdot 1 + \frac{8}{3EI} 1 \cdot 1 \cdot a_{34}.$$

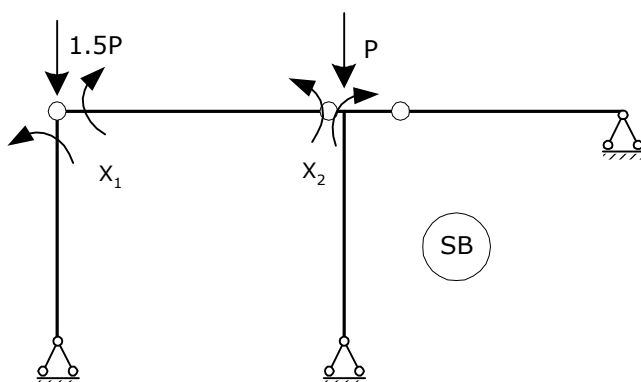


Fig. 11. 2. Cadru static nedeterminat. Sistem de bază

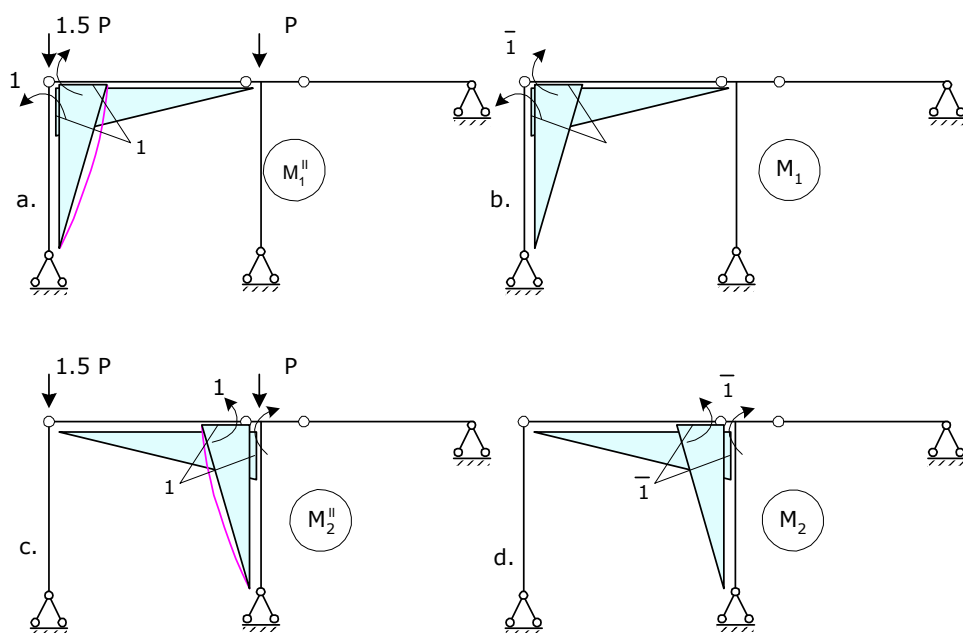


Fig. 11. 3. Cadru static nedeterminat. Calcul de stabilitate.

a. și c. Diagrame unitară de moment încovoietor în starea reală de încărcare a sistemului de bază. b. și d. Diagrame unitare de moment încovoietor în starea virtuală de încărcare a sistemului de bază

Matricea de flexibilitate este:

$$[\delta_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{8}{3}a_{12} + \frac{10}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{5}{9} & \frac{10}{9} + \frac{8}{3}a_{34} \end{bmatrix}.$$

g) Stabilirea ecuației de stabilitate.

Ecuția de stabilitate se obține prin anularea determinantului matricei coeficienților, relația (11.4):

$$\det(\delta_{ij}) = 0.$$

Luând în considerare matricea de flexibilitate determinată la punctul anterior și relația (11.4), ecuația de stabilitate are forma:

$$\left(\frac{8}{3}a_{12} + \frac{10}{9}\right)\left(\frac{10}{9} + \frac{8}{3}a_{34}\right) - \frac{5}{9}\frac{5}{9} = 0$$

sau

$$5,78a_{12}a_{34} + 2,41a_{12} + 2,41a_{34} - 1 = 0. \quad (11.18)$$

h) Aflarea soluției ecuației de stabilitate.

Pentru găsirea soluției ecuației de stabilitate se procedează prin încercări. Se propune a valoare pentru factorul de compresiune al barei etalon,  $v_{12}$ . Bara etalon "12" are o comportare, dacă interpretăm posibilitățile de deformare a structurii, intermediară între cea a unei bare dublu articulate, pentru care:

$$v = \frac{\pi}{\gamma^2} = \frac{3,14}{1} = 3,14$$

și comportarea barei încastrate la extremitatea superioară, aici în nodul structurii și articulată la capătul inferior, avem:

$$v = \frac{\pi}{\gamma} = \frac{3,14}{0,707} = 4,44,$$

dar mai apropiată de cea a ultimului tip de bară. De aceea, se consideră, pentru factorul de compresiune, valoarea:

$$v = 4,0.$$

Se acceptă în prima iterație valoare  $v_{12} = 4,0$  și folosind relația (11.17), se obține:

$$v_{34} = 0,8165 \cdot v_{12} = 3,266. \quad (11.19)$$

Pentru cei doi factori de compresiune,  $v_{12}$  și  $v_{34}$  se determină parametrul  $\alpha$  aplicând relația (9.50):

$$\alpha = \frac{3}{v} \left( \frac{1}{v} - \frac{1}{\operatorname{tg} v} \right),$$

iar parametrii  $\alpha$  corespunzători:

$$\alpha_{12} = -0,460268 \quad (11.20)$$

și

$$\alpha_{34} = -7.064066 . \quad (11.21)$$

Introducând valorile (11.20) și (11.21) în ecuația de stabilitate, relația (11.18), eroarea absolută este:

$$\epsilon_a = 5,78\alpha_{12}\alpha_{34} + 2,41\alpha_{12} + 2,41\alpha_{34} - 1 = -0,34 . \quad (11.22)$$

Se alege, în etapa următoare a iterației, o altă valoare pentru factorul de compresiune, dorind să se obțină o eroare absolută pozitivă. Se încearcă  $v_{12} = 3,95$ . Rezultă:

$$v_{34} = 3,22517 , \quad \alpha_{12} = -0,533 , \quad \alpha_{34} = -10,8146$$

și

$$\epsilon_a = 4,97 . \quad (11.23)$$

Deoarece s-au găsit pentru două valori ale factorului de compresiune erori relative de semne diferite, în următoarea etapă a iterației se va considera media factorilor de compresiune:

$$v_{12} = \frac{4,0 + 3,95}{2} = 3,975 .$$

Urmând calea parcursă mai sus rezultă:  $\epsilon_a = 1,7$ .

Se continuă iterația cu  $v_{12} = \frac{4,0 + 3,975}{2} = 3,9875$  ș.a.m.d.

După mai multe etape în iterație s-a ajuns la valoarea  $v_{12} = 3,995$ , pentru care rezultă:

$$\alpha_{12} = -0,4671935 \text{ și } \alpha_{34} = -7,32463748 ,$$

care introduse în ecuația de stabilitate conduce la:

$$\epsilon_a = 19,7792911 - 19,7783109 = 0,00098$$

și eroarea relativă:

$$\epsilon_r \% = \frac{0,00098}{19,7792911} 100 = 0,005 < 0,1 .$$

Prin urmare,  $v_{cr} = 3,995$  și aplicând relația (11.15) ajungem la valoarea critică a încărcării:

$$P_{cr} = 0,166EI . \quad (11.24)$$



### 11.3.2. Calculul de stabilitate al unui cadru static nedeterminat cu noduri deplasabile

Se consideră cadrul din figura 11.4.a pentru care se cere să se determine încărcarea critică de pierdere a stabilității, prin metoda forțelor.

În vederea soluționării problemei se vor aplica etapele de calcul expuse în paragraful 11.2, după cum urmează.

a) Determinarea eforturilor axiale de ordinul I din barele structurii.

Analizând structura, propusă pentru studiu, se constată că este de două ori static nedeterminată,  $GNS = 2$ , iar datorită faptului că forța exterioară este aplicată într-un nod al structurii, cu direcția coincidând cu axa stâlpului „12”, nu mai este necesar să efectuăm un calcul de ordinul I pentru a afla eforturile axiale din barele cadrului. Efortul axial este evident:

$$N_{12} = P \quad (11.14)$$

iar în restul barelor eforturile sunt nule:  $N_{34} = 0$  și  $N_{23} = 0$ .

b) Calculul factorilor de compresiune,  $v_{ij}$ .

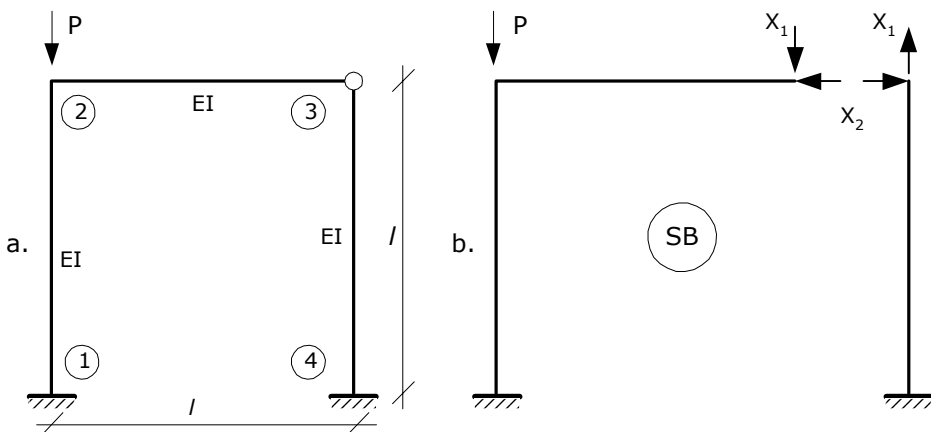


Fig. 11. 4. Cadru static nedeterminat. Calcul de stabilitate.

a. Structura considerată. b. Sistem de bază

Se folosește relația (11.5). Luând în considerare caracteristicile geometrice și fizice ale barelor structurii și eforturile axiale determinate în etapa precedentă rezultă:

$$v_{12} = l_{12} \sqrt{\frac{N_{12}}{EI_{12}}} = l \sqrt{\frac{P}{EI}} \quad (11.15)$$

$$v_{34} = v_{23} = 0.$$

c) Exprimarea factorilor de compresiune funcție de factorul de compresiune maxim.

d) Alegerea sistemului de bază.

În conformitate cu cele precizate în paragraful 11.2, sistemul de bază, în acest caz, este un sistem static determinat prin suprimarea celor două legături suplimentare, care au fixat și gradul de nedeterminare statică a structurii. Sistemul de bază este prezentat în figura 11.4.b fiind format din grinzi (bare) încastrate.

e) Trasarea diagramelor unitare de moment încovoietor.

Diagramele unitare sunt trasate și prezentate în figura 11.5, în două stări de încărcare corespunzătoare stării virtuale, diagrame de eforturi de ordinul I și stării reale, diagrame de eforturi de ordinul II.

f) Calculul coeficienților,  $\delta_{ij}$ .

Coeficienții se determină aplicând pseudo-metoda Mohr-Maxwell, relația (10.2). Se obțin următoarele relații de calcul:

$$\delta_{11} = \sum \frac{\overline{M}_1(x)M_1^{\text{II}}}{EI} dx = \frac{l}{3EI} l \cdot l + \frac{l}{3EI} l \cdot l \cdot \theta' + \frac{l}{3EI} l \cdot l \cdot \theta'' + 2 \frac{l}{6EI} l \cdot l \cdot \theta$$

$$\delta_{12} = \sum \frac{\overline{M}_1(x)M_2^{\text{II}}}{EI} dx = -\frac{l}{3EI} l \cdot l \cdot \theta' - \frac{l}{6EI} l \cdot l \cdot \theta$$

și

$$\delta_{22} = \sum \frac{\overline{M}_2(x)M_2^{\text{II}}}{EI} dx = \frac{l}{3EI} l \cdot l \cdot \theta' + \frac{l}{3EI} l \cdot l.$$

Matricea de flexibilitate este:

$$[\delta_{ij}] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix}.$$

g) Stabilirea ecuației de stabilitate.

Ecuația de stabilitate se obține prin anularea determinantului matricei coeficienților, relația (11.4):

$$\det([\delta_{ij}]) = 0.$$

Luând în considerare matricea de flexibilitate determinată la punctul anterior și relația (11.4), ecuația de stabilitate are forma:

$$\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2 = 0$$

sau

$$2\theta' + \theta'' + \theta - 0.25\theta^2 + \theta' \theta'' + 1 = 0. \quad (11.18)$$

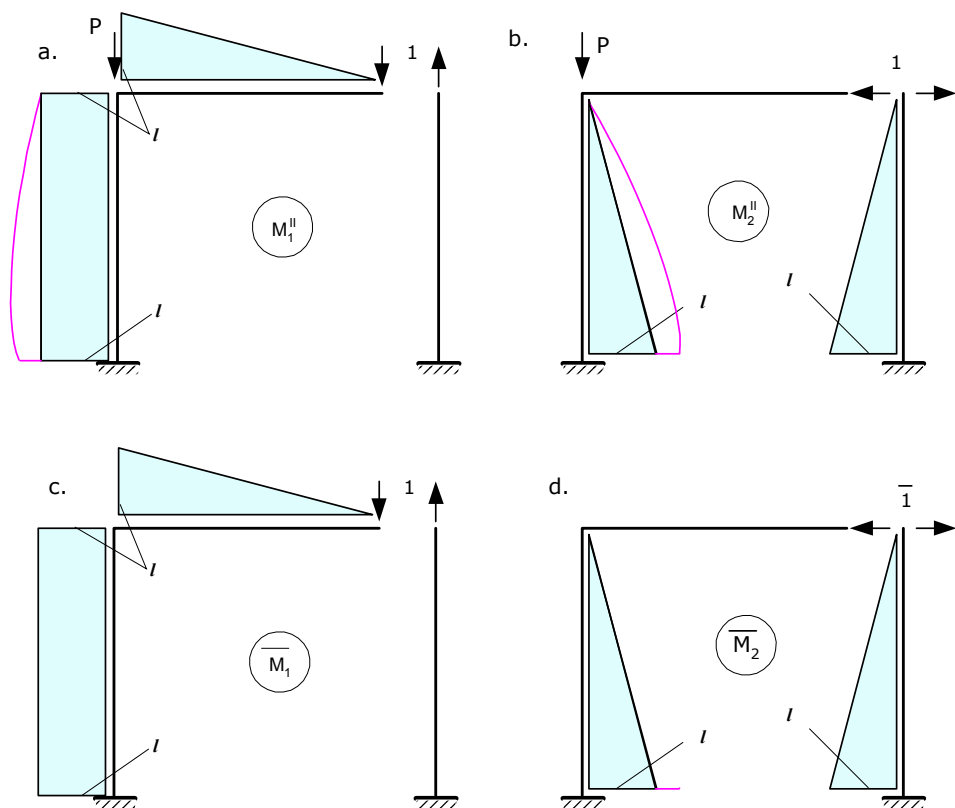


Fig. 11. 5. Cadru static nedeterminat. Calcul de stabilitate.

a. și b. Diagrame unitare de moment încovoietor în starea reală de încărcare a sistemului de bază. c. și d. Diagramă unitară de moment încovoietor în starea virtuală de încărcare a sistemului de bază

h) Aflarea soluției ecuației de stabilitate.

Pentru găsirea soluției ecuației de stabilitate se procedează prin încercări, identic cum s-a procedat în aplicația precedentă. Ecuația se verifică pentru:

$$v_{cr} = 2.9375,$$

cu

$$\varepsilon_a = 0.00132$$

și

$$\varepsilon_r \% = 0.073 < 0.1$$

i) Determinarea încărcării critice

Cunoscând expresia factorului de compresiune critică:

$$v_{cr} = 2.9375 = l \sqrt{\frac{P_{cr}}{EI}},$$

rezultă pentru încărcare critică expresia:

$$P_{cr} = 8.63 \frac{EI}{l^2}.$$

### 11.3.3. Calculul de stabilitate al unui cadru static nedeterminat

Se consideră cadrul din figura 11.5.a pentru care se cere să se determine încărcarea critică de pierdere a stabilității, prin metoda forțelor.

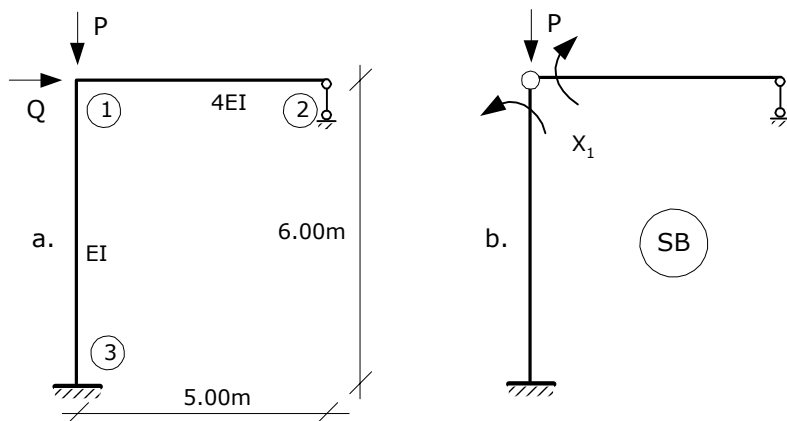


Fig. 11. 5. Cadru static nedeterminat. Calcul de stabilitate.  
a. Structura considerată. b. Sistem de bază

În vederea soluționării problemei se vor aplica etapele de calcul expuse în paragraful 11.2, după cum urmează.

a) Determinarea eforturilor axiale de ordinul I din barele structurii.

Analizând structura propusă pentru studiu se constată că este o dată static nedeterminată,  $GNS = 1$ , iar datorită faptului că forțele exterioare sunt aplicate în nodul structurii, cu direcțiile coincidând cu axele barelor, nu mai este necesar să efectuăm un calcul de ordinul I pentru a afla eforturile axiale din barele cadrului. Eforturile axiale sunt evidente:

$$N_{13} = P, \quad (11.14)$$

$$N_{12} = 0.$$

b) Calculul factorilor de compresiune,  $v_{ij}$ .

Se folosește relația (11.5). Luând în considerare caracteristicile geometrice și fizice ale barelor structurii și eforturile axiale determinate în etapa precedentă rezultă:

$$v_{13} = l_{13} \sqrt{\frac{N_{13}}{EI_{13}}} = 6.0 \sqrt{\frac{P}{EI}}, \quad (11.15)$$

$$v_{12} = 0.$$

- c) Exprimarea factorilor de compresiune funcție de factorul de compresiune maxim.

- d) Alegerea sistemului de bază.

În conformitate cu cele precizate în paragraful 11.5.b sistemul de bază, în acest caz, este un sistem static determinat prin suprimarea unei legături suplimentare, care a fixat și gradul de nedeterminare statică a structurii. Sistemul de bază este prezentat în figura 11.2 fiind format dintr-o grindă (bară) încastrată și o grindă simplu rezemată.

- e) Trasarea diagramelor unitare de moment încovoietor.

Diagramele unitare sunt trasate și prezentate în figura 11.6.a și b, în două stări de încărcare corespunzătoare stării virtuale, diagrame de eforturi de ordinul I și stării reale, diagrame de eforturi de ordinul II.

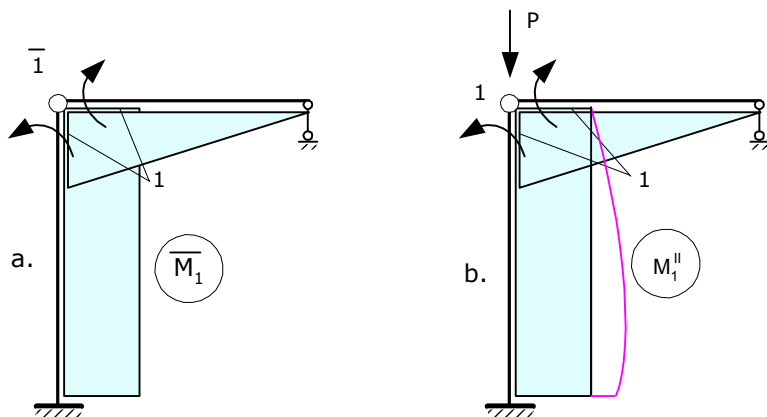


Fig. 11. 6. Cadru static nedeterminat. Calcul de stabilitate.

- a. Diagramă unitară de moment încovoietor în starea virtuală de încărcare a sistemului de bază. b. Diagramă unitară de moment încovoietor în starea reală de încărcare a sistemului de bază

- f) Calculul coeficienților,  $\delta_{ij}$ .

Coeficientul se determină aplicând pseudo-metoda Mohr-Maxwell, relația (10.2). Se obține următoarea relație de calcul:

$$\delta_{11} = \sum \frac{\overline{M}_I(x) M_I^{II}}{EI} dx = \frac{5.0}{3 \cdot 4EI} 1 \cdot 1 \cdot + \frac{6.0}{3EI} 1 \cdot 1 \cdot \theta' + \frac{6.0}{3EI} 1 \cdot 1 \cdot \theta'' + 2 \frac{1}{6EI} 1 \cdot 1 \cdot \theta$$

g) Stabilirea ecuației de stabilitate.

Deoarece cadrul este o dată static determinat apare evident că ecuația de stabilitate are forma:

$$\delta_{11} = 0$$

sau

$$0.208 + \theta' + \theta'' + \theta = 0$$

h) Aflarea soluției ecuației de stabilitate.

Pentru găsirea soluției ecuației de stabilitate se procedează prin încercări, identic cum s-a procedat în aplicația precedentă. Ecuația se verifică pentru:

$$v_{cr} = 2.94 ,$$

i) Determinarea încărcării critice

Cunoscând expresia factorului de compresiune critică:

$$v_{cr} = 2.94 = 6.0 \sqrt{\frac{P_{cr}}{EI}} ,$$

rezultă pentru încărcare critică expresia:

$$P_{cr} = 2.94^2 \frac{EI}{6.0^2} = 0.24EI .$$

# CURSUL 12

## CALCULUL DE ORDINUL II AL CADRELOR PRIN METODA FORȚELOR

### 12.1. Metoda forțelor în calculul de ordinul I

Structurile static nedeterminate au un număr mai mare de legături decât cele minim necesare realizării indeformabilității geometrice, ceea ce face imposibilă soluționarea lor numai folosind ecuațiile de echilibru static.

De aceea, este necesar scrierea de ecuații suplimentare stabilite prin exprimarea condițiilor de deformare a structurii. Prin urmare, pentru a determina starea de efort și deformare dintr-o structură nedeterminată static, trebuie să se aplice concomitent cele două condiții care caracterizează echilibrul unei structuri, și anume: condiția de echilibru static și condiția de continuitate a deformatelor.

În metoda forțelor se utilizează ca necunoscute forțele de legătură suplimentare egale cu gradul de nedeterminare statică a structurii, iar ecuațiile suplimentare reprezintă exprimarea condiției de continuitate a deformatelor pe direcția fiecărei necunoscute.

Prin grad de nedeterminare statică a unei structuri se înțelege diferența între numărul total al necunoscutelor problemei și numărul ecuațiilor de echilibru static. Gradul de nedeterminare statică se determină prin aplicarea următoarelor relații:

a.

$$\text{GNS} = l + r - 3c, \quad (12.1)$$

unde: GNS reprezintă gradul de nedeterminare statică;

$l$  – numărul de legături simple interioare structurii între corpuri;

$r$  – numărul de legături simple în reazemele structurii;

$c$  – numărul de corpuri distincte;

3 – numărul de ecuații de echilibru static care se pot scrie pentru un corp

b.

$$\text{GNS} = 3c - \sum s, \quad (12.2)$$

în care:  $c$  reprezintă numărul de contururi închise distincte;

3 – numărul de nedeterminări statice ale unui contur închis;

$s$  – numărul de legături care lipsesc unui contur pentru a fi închis.

Pentru rezolvarea structurilor static nedeterminate, prin metoda forțelor, este necesar ca un număr de legături, egal cu gradul de nedeterminare statică a structurii, să fie suprimate și în locul lor să se introducă echivalentul mecanic (forțe sau cupluri). Sistemul obținut prin suprimarea de legături, în modul expus anterior, care este un sistem static determinat, se numește sistem de bază.

Forțele și eforturile din legăturile suprimate din reazeme sau continuități interioare, odată puse în evidență (necunoscutele problemei) împreună cu forțele exterioare, constituie un sistem de forțe care acționează pe structura static determinată.



Sub acțiunea acestui sistem de forțe, structura va fi în echilibru indiferent de ce valori se vor da forțelor necunoscute. Soluția unică a problemei se obține din condiția ca sistemul de bază, încărcat cu forțele exterioare date și forțele necunoscute, notate  $X_i$ , să se comporte identic cu sistemul dat, adică deplasările totale pe direcțiile tuturor necunoscutelor (legăturilor suprimate) să fie egale cu zero, deoarece legăturile sistemului real nu permite astfel de deplasări.

În cazul unui sistem de  $n$  ori static nedeterminat condițiile care se scriu sunt:

$$\Delta_1 = 0, \Delta_2 = 0, \dots, \Delta_i = 0, \dots, \Delta_n = 0, \quad (12.3)$$

unde  $\Delta_i$  reprezintă deplasare totală pe direcția necunoscutei  $X_i$ .

Dacă forțele exterioare date și cele din legăturile suprimate ar fi aplicate simultan pe sistemul de bază, ele ar produce deplasări pe direcția fiecărei necunoscute. Suma acestor deplasări reprezintă deplasarea totală,  $\Delta_i$ , care pentru respectarea condiției de compatibilitate a deformatelor trebuie să fie egală cu zero.

Relația de calcul a deplasării totale pe direcția necunoscutei  $X_i$  este:

$$\delta_{i1}X_1 + \delta_{i2}X_2 + \dots + \delta_{ii}X_i + \dots + \delta_{in}X_n + \Delta_{ip} = 0. \quad (12.4)$$

În ecuația (12.4) coeficienții necunoscutelor sunt deplasări produse pe direcția necunoscutei  $X_i$  din încărcarea sistemului de bază separat cu forțele  $X_1 = 1, X_2 = 1, \dots, X_i = 1, \dots, X_n = 1$ , iar termenul liber este deplasarea pe direcția necunoscutei  $X_i$ , produsă de forțele exterioare date, aplicate pe sistemul de bază.

Scriind  $n$  asemenea ecuații se obține sistemul de ecuații de condiție care se poate exprima sub forma:

$$\sum_{j=1}^n \delta_{ij}X_j + \Delta_{ip} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (12.5)$$

După aflarea soluției sistemului de ecuații de condiție se trasează diagramele finale de eforturi prin suprapunerea efectelor.

## 12.2. Calculul de ordinul II

Metoda forțelor, în calculul de ordinul II, se aplica la fel ca în cel de ordinul I, cu unele aspecte specifice, în special referitor la alegerea sistemului de bază, calculul coeficienților și termenilor liberi și suprapunerea efectelor, privind trasarea diagramelor finale de eforturi.

Sistemul de bază provine din sistemul real prin suprimarea unor legături, cu mențiunea că subsistemele sistemului de bază trebuie să fie constituite din bare simplu rezemate (dublu articulate) și/sau bare încastrate (console), pentru care s-au calculat parametrii  $\alpha, \beta, \theta, \theta'$  etc.

Necunoscutele problemei sunt forțe, notate  $X_i$ , care se introduc pe direcțiile legăturilor suprimate.

Ecuatiile de condiție, care exprimă identificarea sistemului de bază cu sistemul real, sunt ecuații de continuitate.

La calculul coeficienților și termenilor liberi apar diferențe, față de calculul de ordinul I, deoarece diagramele reale de eforturi se trasează printr-un calcul de ordinul II obținute pentru cele tipuri de grinzi: simplu rezemate și încastrate, prin metoda parametrilor în origine.

Suprapunerea efectelor, la trasarea diagramelor de eforturi finale, se va realiza plecând de la rezultatele concrete obținute pentru diverse tipuri de încărcări, în cazul celor două tipuri de grinzi, menționate anterior.

### 12.2.1. Etape de calcul

În continuare, se va face o prezentare a etapelor de calcul referito la trasarea diagramelor de eforturi de ordinul II, prin metoda forțelor.

- a) Se realizează un calcul de ordinul I pentru a afla eforturile axiale din barele structurii. Se iau în considerare numai eforturile de compresie:

$$N_{ij} = f(P); \quad (12.6)$$

- b) Se calculează factorii de compresie pentru barele structurii, aplicând relația (11.3), care ia forma:

$$\nu_{ij} = l_{ij} \sqrt{\frac{N_{ij}}{EI_{ij}}}, \quad (12.7)$$

în calculul de ordinul II, în care sarcinile sunt cunoscute, factorii de compresie  $\nu$  au valori determinate încă de la începutul calculelor;

- c) Se depistează factorul de compresie maxim și funcție de acest factor se exprimă ceilalți factori de compresie. Dacă notăm factorul de compresie maxim, notat " $\nu$ " sau " $\nu_{\max}$ ", atunci ceilalți factori de compresie se determină funcție de acesta astfel:

$$v_{ij} = v \frac{l_{ij}}{l} \sqrt{\frac{N_{ij}}{N}} \frac{EI}{EI_{ij}}, \quad (12.8)$$

unde  $v$  se determină cu relația (11.3), convenim să neglijăm forțele axiale din barele în care  $v < 0.2v_{\max}$ , în aceste bare se va admite  $N \approx 0$ , deci  $v \approx 0$ ;

- d) Se alege un sistem de bază, corespunzător metodei forțelor, format din bare dublu articulate (simplu rezemate) și/sau console (grinda încastrată).

Obs. Această restricție este impusă de faptul că am evidențiat modalități și relații de calcul pentru deplasări (să aplicăm relația Mohr-Maxwell) numai în cazurile specifice grinzii dublu articulate și grinda încastrată;

- e) Se trasează diagramele de moment încovoietor pe sistemul de bază ales, în cele două stări: starea reală (diagrame de ordinul II) și starea virtuală (diagrame de moment de ordinul I);
- f) Se calculează coeficienții  $\delta_{ij}$  aplicând relația (11.2) după regulile precizate în cursul numărul 10:

$$\delta_{ij} = \int_0^l \frac{\overline{M}_i(x) M_j^{II}}{EI} dx. \quad (12.9)$$

- g) Se calculează termenii liberi cu relația:

$$\Delta_{ip} = \int_0^l \frac{\overline{M}_i(x) M_p^{II}}{EI} dx. \quad (12.10)$$

- h) Se rezolvă sistemul de ecuații de condiție și se trasează diagramele finale de eforturi.

### 12.2.2. Aplicația nr.1

Să se traseze diagrama finală de moment încovoietor pentru cadrul din figura 12.1.a. Se cunosc:

$$P = 140\text{KN}, \quad Q = 1\text{KN}, \quad EI = 5000\text{KNm}^2.$$

- a) Determinarea eforturilor axiale de ordinul I din barele structurii. Eforturile axiale sunt:

$$N_{13} = P$$

și

$$N_{12} = 0.$$

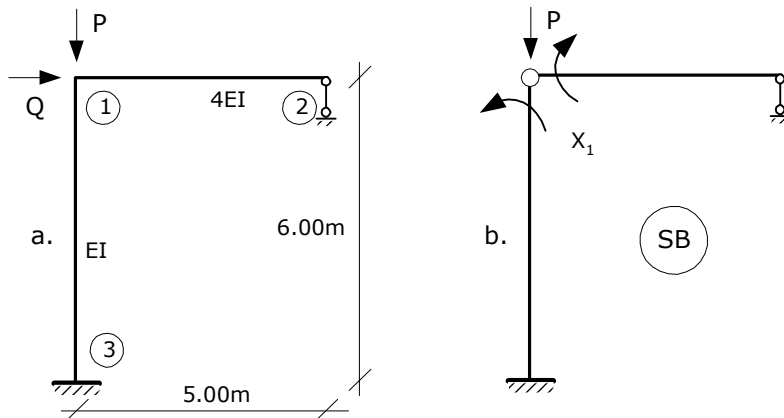


Fig. 12. 1. Cadru static nedeterminat. Calcul de ordinul II.  
a. Structura considerată. b. Sistemul de bază

- b) Calculul factorului de compresiune,  $v_{13}$ .

Folosind relația (11.3), factorul de compresiune are valoarea:

$$v_{13} = l_{13} \sqrt{\frac{N_{13}}{EI_{13}}}$$

sau

$$v_{13} = 6.0 \sqrt{\frac{140}{5000}} = 1.003 \approx 1.0. \quad (12.11)$$

- c) Alegerea sistemului de bază și scrierea ecuației de condiție.

Sistemul de bază stabilit este prezentat în figura 12.1.b, alcătuit din două grinzi: grinda încastrată 13 și grinda simplu rezemată 12.

Ecuația de condiție are forma:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1p} = 0.$$

- d) Trasarea diagramelor unitare de moment încovoietor.

Diagramele unitare sunt trasate și prezentate în figura 11.2 în două stări de încărcare corespunzătoare stării virtuale, figura 12.2.a, diagrame de eforturi de ordinul I și stării reale, diagrame de eforturi de ordinul II, figura 12.2.b.

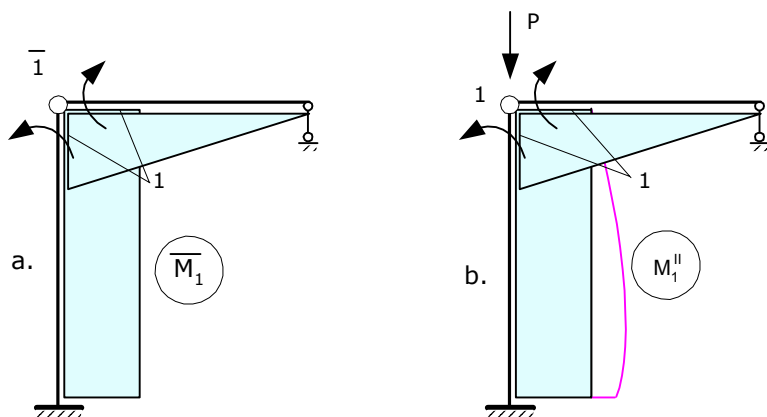


Fig. 12. 2. Cadru static nedeterminat. Calcul de stabilitate.

a. Diagramă unitară de moment încovoietor în starea virtuală de încărcare a sistemului de bază. b. Diagramă unitară de moment încovoietor în starea reală de încărcare a sistemului de bază

e) Calculul coeficientului  $\delta_{11}$ .

Coeficientul se determină aplicând pseudo-metoda Mohr-Maxwell, relația (10.2), rezultă:

$$\begin{aligned}\delta_{11} &= \sum \frac{\bar{M}_I(x) M_I^{II}}{EI} dx = \\ &= \frac{5.0}{3 \cdot 4EI} 1 \cdot 1 + \frac{6.0}{3EI} 1 \cdot 1 \cdot \theta' + \frac{6.0}{3EI} 1 \cdot 1 \cdot \theta'' + 2 \frac{6.0}{6EI} 1 \cdot 1 \cdot \theta,\end{aligned}$$

sau

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} (0.417 + 2\theta' + 2\theta'' + 2\theta). \quad (12.12)$$

f) Trasarea diagramei reale de moment încovoietor de ordinul II pentru acțiunile exterioare date. Aceasta este prezentată în figura 12.3.

g) Calculul termenului liber  $\Delta_{1p}$ .

Termenul liber se determină aplicând pseudo-metoda Mohr-Maxwell, relația (10.2), prin integrarea diagramelor din figura 12.2.a și figura 12.3. Rezultă:

$$\begin{aligned}\Delta_{1p} &= \sum \frac{\bar{M}_I(x) M_p^{II}}{EI} dx = \\ &= -\frac{6.0}{3EI} 1 \cdot 6 \cdot \theta' - \frac{6.0}{6EI} 1 \cdot 6 \cdot \theta\end{aligned}$$

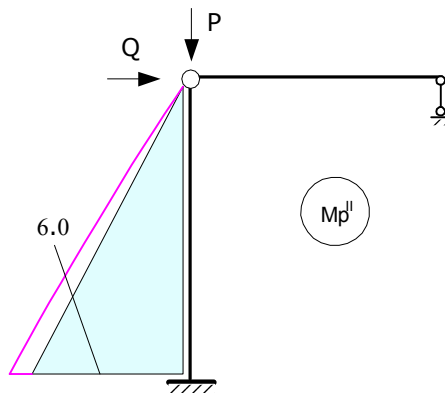


Fig. 12. 3. Cadru static nedeterminat. Calcul de ordinul II.  
Diagramă de moment încovoietor în starea reală  
de încărcare cu forțele exterioare a sistemului de bază

sau

$$\Delta_{lp} = -\frac{6.0}{EI} (2\theta' + \theta). \quad (12.13)$$

Obs. Cunoscând relațiile de definire a parametrilor  $\theta', \theta'', \theta$ , expresiile (10.9), 10.10) și (10.11), aceștia iau valorile:

$$\theta' = \frac{3(\operatorname{tg} v_{13} - v_{13})}{v_{13}^3} = \frac{3(\operatorname{tg} l - l)}{l^3} = 1.6722,$$

$$\theta'' = \frac{3}{v_{13}^2} \left( 1 + \frac{\operatorname{tg} v_{13}}{v_{13}} + v_{13} \operatorname{tg} v_{13} - \frac{2}{\cos v_{13}} \right) = \frac{3}{l^2} \left( 1 + \frac{\operatorname{tg} l}{l} + l \cdot \operatorname{tg} l - \frac{2}{\cos l} \right) = 1.23955$$

$$\theta = \frac{6}{v_{13}^2} \left( \frac{1}{\cos v_{13}} - \frac{\operatorname{tg} v_{13}}{v_{13}} \right) = \frac{6}{l^2} \left( \frac{1}{\cos l} - \frac{\operatorname{tg} l}{l} \right) = 1.76045,$$

care introduse în relațiile (12.12) și (12.13), acestea iau valorile:

$$\delta_{11} = 9.761446 \frac{1}{EI}$$

și

$$\Delta_{lp} = -30.62936 \frac{1}{EI}.$$

h) Aflarea soluția ecuației de condiție.

Valoarea necunoscută  $X_1$  se găsește rezolvând ecuația de condiție:

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} = -\frac{-30.62936 \frac{1}{EI}}{9.761446 \frac{1}{EI}} = 3.13779.$$

i) Trasarea diagramei finale de moment încovoietor.

În calculul de ordinul II nu se poate aplica principiul suprapunerii efectelor, în forma cunoscută din Statica Construcțiilor, prin utilizarea diagramelor unitare și a celei din încărcări exterioare. De aceea, la trasarea diagramei finale de moment încovoietor se folosesc rezultatele obținute, prin aplicarea metodei parametrilor în origine, pentru cele două grinzi: grinda simplu rezemată și grinda încastrată, pentru diferite încărcări.

Pentru structura luată în studiu, pe riglă avem numai eforturi de ordinul I și, prin urmare, efortul moment încovoietor se determină direct prin multiplicarea valorilor din diagrama unitară cu valoarea necunoscută  $X_1$ , obținută din ecuația de condiție. În diagrama produsă de încărcărilor exterioare, diagrama pe riglă este nulă.

Pe stâlp, suprapunerea se face plecând de la diagramele cunoscute pentru grinda încastrată, separat produse de un cuplu

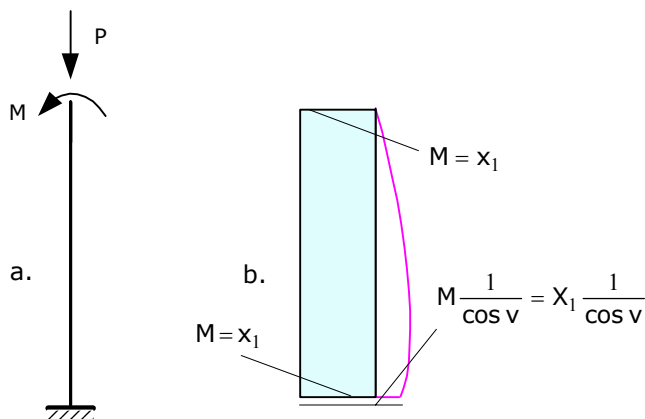


Fig. 12. 4. Grinda încastrată. a. Situație de încărcare.  
b. Diagramă de moment încovoietor de ordinul II

concentrat, identificat aici, cu un moment egal cu necunoscuta problemei,  $X_1$ , pentru care cunoaștem valoarea efortului de ordinul II în încastrare, figura 12.4, și diagrama produsă de forța concentrată,

aplicată normal pe axa barei, în extremitatea liberă a grinzii încastrate, figura 12.5.

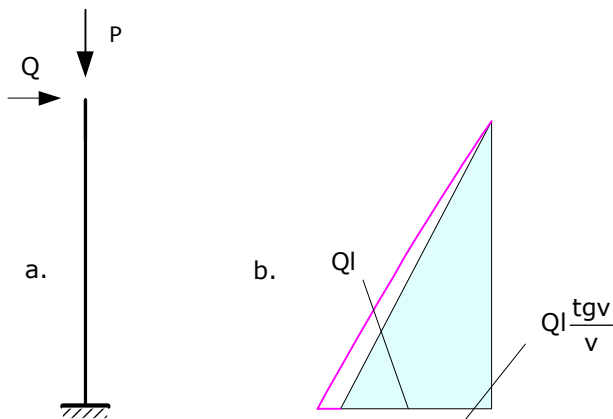


Fig. 12. 5. Grinda încastrată. a. Situație de încărcare.  
b. Diagramă de moment încovoietor de ordinul II

Eforturile finale se calculează în modul următor:

$$M_{12, \text{final}}^{\text{II}} = M_{12}^{\text{II}} \cdot X_1 = 1 \cdot 3,13779 = 3,13779 \text{KNm},$$

$$M_{13, \text{final}}^{\text{II}} = M_{13}^{\text{II}} \cdot X_1 = 1 \cdot 3,13779 = 3,13779 \text{KNm},$$

$$M_{31, \text{final}}^{\text{II}} = X_1 \cdot \frac{1}{\cos v} - Q \cdot l \frac{\text{tg } v}{v} = 3,13779 \frac{1}{\cos 1} - 1 \cdot 6.0 \frac{\text{tg } 1}{1} = -3,536976 \text{KNm}.$$

Diagrama finală a momentului încovoietor de ordinul II este prezentată în figura 12.6.a, iar diagrama corespunzătoare unui calcul de ordinul I este desenată în figura 12.6.b.

Comparativ, în procente, momentul încovoietor de ordinul II este mai mare cu 9.67% , față de cel calculat exprimând echilibrul în raport cu axa inițială nedefromată a structurii.

### 12.2.3. Aplicația nr.2.

Pentru structura soluționată în paragraful 12.2.2 se cere să se calculeze deplasarea pe orizontală a nodului numărului 1.

Deplasările de ordinul II se calculează, după cum s-a precizat în cursul 10, cu relația Moh-Maxwell, prin considerarea a două situații de încărcare: starea reală constituită din structura dată acționată de sistemul de forțe exterioare, sub acțiunea cărora se dezvoltă deplasarea în secțiunea în care se dorește aflarea deplasării și starea virtuală,



constituită din structura dată sau a oricărei structuri static determinate obținută din sistemul dat prin suprimarea legăturilor suplimentare (deci, inclusiv sistemul de bază) solicitată de o forță (forță concentrată, cuplu concentrat, sarcină uniform distribuită etc.) de intensitate egală cu unitatea.

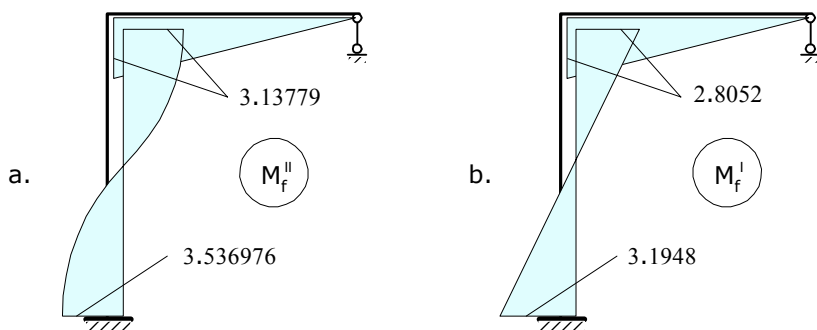


Fig. 12. 6. Cadru static nedeterminat. Diagrame finale de moment încovoietor: a. diagrama de ordinul II; b. diagrama de ordinul I

Diagrama de moment încovoietor din starea reală este de ordinul II, iar diagrama corespunzătoare stării virtuale este calculată prin exprimarea echilibrului în raport cu poziția inițială a structurii.

Deplasarea  $\Delta_i$  se calculează cu relația (10.2) pe care o reluăm

$$\Delta_i = \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_i^I(x) M_f^{II}(x)}{EI} dx, \quad (12.14)$$

unde:  $\bar{M}_i(x)$  reprezintă momentul încovoietor din secțiunea  $x$  a diagramei de moment calculată în starea virtuală de încărcare a structurii date (acțiune egală cu unitatea aplicată în secțiunea  $i$  și pe direcția pe care dorim să aflăm deplasarea);

$M_f^{II}(x)$  - momentul încovoietor din secțiunea  $x$  a diagramei de moment produsă de încărcările exterioare aplicate pe structura reală, luată în studiu și calculată prin exprimarea echilibrului în raport cu poziția deformată a structurii, diagramă de ordinul II;

$EI$  - modulul de rigiditate la solicitarea de încovoiere;

$l$  - lungimea tronsonului pe care modulul de rigiditate la solicitarea de încovoiere este constant, iar cele două diagrame de moment încovoietor au aceeași lege de variație.

Diagrama  $M_f^{II}$  este prezentată în figura 12.6, iar pentru starea virtuală în figura 12.7.a, care cuprinde sistemul de bază acționat de o forță concentrată egală cu unitatea, aplicată în nod și pe direcție orizontală și figura 12.7.b diagrama de moment încovoietor respectivă,  $\bar{M}$ .

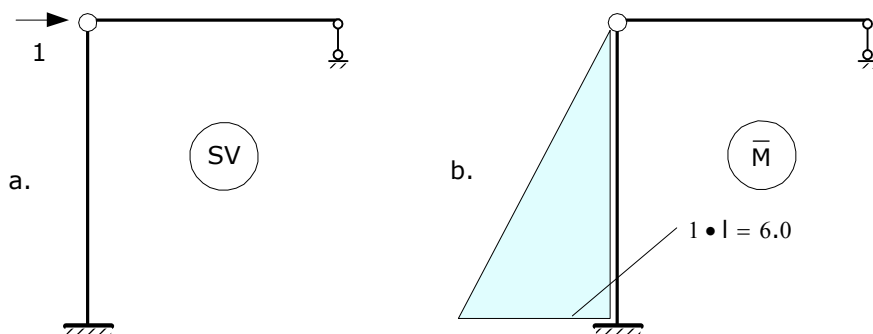


Fig.12.7. Sistem de bază în starea virtuală de încărcare:  
a) situație de încărcare; b) digrama de moment încovoietor

Analizând cele două diagrame, în cele două situații de încărcare: virtuală și reală, se observă că se suprapun numai pe lungimea stâlpului 13. Pentru a efectua integrarea celor două diagrame este necesar să descompunem prima diagramă, de pe stâlp, notată generic  $M_f^{II}$ , figura 12.8.

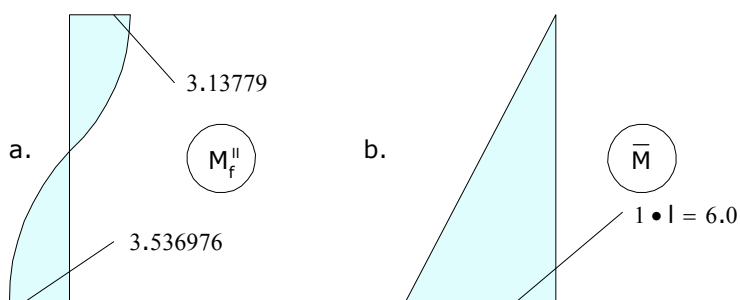


Fig. 12. 8. Calculul deplasării de ordinul II a nodului cadrului.  
Cele două diagrame de moment încovoietor (de la nivelul stâlpului) care se integrează: a. diagrama de ordinul II din starea reală de încărcare; b. diagrama de ordinul I corespunzătoare stării virtuale (aici trasată pe un sistem static determinat).

Din analiza diagramei de ordinul II apar două posibilități:

- a) considerarea stâlpului drept grindă simplu rezemată, figura 12.9.a, acționată în extremități de cupluri egale cu momentele încovoietoare din extremitățile diagramei de momente de ordinul II, situație echivalentă cu situațiile prezentate în figura 12.9.b și figura 12.9.c;

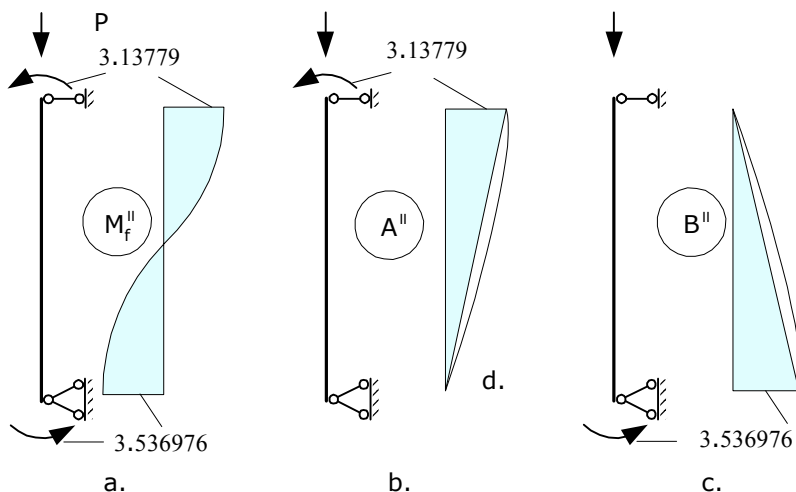


Fig. 12.9. Stâlpul cadrului considerat că se comportă ca o grindă simplu rezemată: a. grinda simplu rezemată acționată în secțiunile de capăt de cupluri concentrate și diagrame de momente de ordinul II corespunzătoare; b. grinda acționată de un cuplu în secțiunea capătului superior și diagrame de momente de ordinul II; c. grinda încărcată de un cuplu concentrat la extremitatea inferioară și diagrame de ordinul II.

- b) considerarea stâlpului drept grindă încastrată acționată în capătul liber cu necunoscuta problemei ( $X_1$ , deci momentul încovoietor din extremitatea superioară a stâlpului), figura 12.4 și cu încărcările exterioare, figura 12.5.

Se aplică regula de integrare a diagramelor, conform relației Mohr Maxwell, se obțin rezultatele:

- a) pentru primul caz expus mai sus, diagramele sunt notate cu litere pe figură??:

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_I^I(x) M_f^{II}(x)}{EI} dx = \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_I^I(x) A(x)}{EI} dx + \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_I^I(x) B(x)}{EI} dx = \\ &= \frac{-6.0}{6EI} \cdot 6.0 \cdot 3.13779 \cdot \beta + \frac{-6.0}{3EI} \cdot 6.0 \cdot 3.536976 \cdot \alpha,\end{aligned}$$

efectuând calculele rezultă:

$$\Delta_1 = 0.004858312\text{m} ;$$

b) pentru cel de al doilea caz, prin integrarea diagramele din figura 12.9, avem:

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_I^I(x) M_f^{II}(x)}{EI} dx = \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_I^I(x) C(x)}{EI} dx + \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_I^I(x) D(x)}{EI} dx + \\ &\quad + \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_I^I(x) C(x)}{EI} dx = \\ &= \frac{6.0}{3EI} \cdot 6.0 \cdot 6.0 \cdot \theta' - \frac{6.0}{6EI} \cdot 6.0 \cdot 3.13779 \cdot \theta - \frac{6.0}{3EI} \cdot 6.0 \cdot 3.13779 \cdot \theta',\end{aligned}$$

efectuând calculele rezultă:

$$\Delta_1 = 0.00485831\text{m} .$$

Între cele două variante diferența între rezultate în eroare relativă este:

$$\varepsilon\% = 0.000041 < 0.1 .$$

# CURSUL 13

## **STUDIUL DE STABILITATE ȘI CALCULUL DE ORDINUL II AL CADRELOR CU NODURI FIXE PRIN METODA DEPLASĂRILOR**

### **13.1. Studiul de stabilitate a cadrelor cu noduri fixe folosind matrice de rigiditate**

În studiu de stabilitate a cadrelor prin metoda deplasărilor este necesar să se cunoască matricea coeficienților sau matricea de rigiditate, conform Staticii matriceale. Acest lucru este realizat, deoarece ecuația de stabilitate, în ambele cazuri de pierdere a stabilității: prin deformare continuă și deformare discontinuă, se definește anulând determinantul matricei de rigiditate a structurii.

La fel ca în Statica Construcțiilor, studiul de stabilitate a structurilor va trata separat cadrele cu noduri fixe, știut fiind faptul că nodurile acestor structuri descriu, în procesul de deformare, exclusiv deplasări unghiulare (rotiri), pe când în cazul structurilor cu noduri deplasabile nodurile, descriu atât deplasări liniare (translații), cât și deplasări unghiulare.

Sistemul de bază, în metoda deplasărilor, după cum se cunoaște, se constituie din sistemul real, luat în studiu, căruia i se adaugă o serie de legături suplimentare astfel încât să blocheze posibilitatea de deplasare: deplasări unghiulare, în cazul cadrelor cu noduri fixe și deplasări unghiulare și liniare, în cazul cadrelor cu noduri deplasabile.

Coeficienții ecuațiilor de condiție, în metoda deplasărilor, se definesc și se calculează pe sistemul de bază, prin realizarea de deformate cu ajutorul cedărilor de reazeme (deplasări unghiulare și liniare) succesive, egale cu unitatea, în blocajele care au definit sistemul de bază. Modalitățile de determinare a coeficienților sunt oferite de Statica Construcțiilor.

### 13.1.1. Ecuația de stabilitate

Ecuația de stabilitate în metoda deplasărilor se obține prin anularea determinantului matricei coeficienților (matricea de rigiditate a structurii). Matricea de rigiditate are următoarea formă:

$$[r_{ij}] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & - & - & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & - & - & r_{2n} \\ - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - \\ r_{n1} & r_{n2} & - & - & r_{nn} \end{bmatrix}. \quad (13.1)$$

Ecuația de stabilitate are alura:

$$\det([r_{ij}]) = 0. \quad (13.2)$$

### 13.1.2. Determinarea elementelor matricei de rigiditate. Cazul cadrelor cu noduri fixe

Matricea de rigiditate (a coeficienților) cuprinde două tipuri de coeficienți: coeficienții principali notați, în general  $r_{ii}$  și coeficienții laterali sau secundari notați  $r_{ij}$ .

Coeficientul principal  $r_{ii}$  reprezintă reacțiunea din blocajul de nod  $i$ , când în nodul  $i$  se produce o rotire (deplasare unghiulară) egală cu unitatea.

Coeficientul lateral (secundar)  $r_{ji}$  reprezintă reacțiunea din blocajul de nod  $j$ , când în nodul  $i$  se produce o rotire (o deplasare unghiulară) egală cu unitatea.

Se consideră un cadru cu noduri fixe pentru care se stabilește sistemul de bază prin blocarea nodurile, figura 13.1.

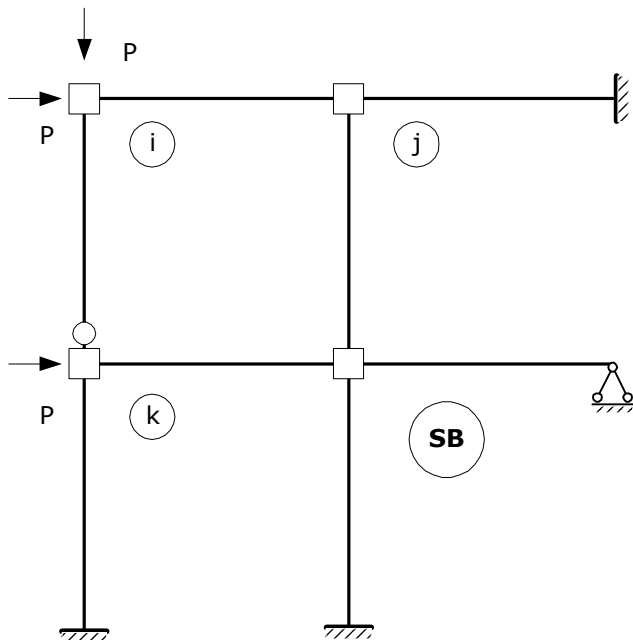


Fig.13.1. Cadru cu noduri fixe. Sistem de bază.

Pentru calculul coeficienților  $r_{ii}$  și  $r_{ji}$  se produce o cedare de reazem în blocajul din nodul  $i$ , egală cu unitatea. Se desenează deformata sistemului de bază, figura 13.2, iar momentele care iau naștere în extremitățile barelor deformate sunt rigiditățile la rotire:  $K_{ij}$  și  $K_{ik}$  și momentul transmis  $M_{tr}$ , calculate cu relațiile:

$$K_{ij} = \frac{4EI}{l} K', \quad (13.3)$$

$$K_{ik} = \frac{3EI}{l} K^0 \quad (13.4)$$

și

$$M_{tr} = t_{ij} K_{ij} = 0.5 \frac{K''}{K'} \frac{4EI}{l} K' = \frac{2EI}{l} K''. \quad (13.5)$$





rezultă:

$$r_{ij} = M_{tr} . \quad (13.7)$$

Coeficientul lateral  $r_{ji}$  este egal cu momentul transmis din nodul  $i$ , din extremitatea barei  $ij$  către nodul  $j$ .

### 13.1.3. Etape în studiul stabilității cadrelor cu noduri fixe

În vederea efectuării unui calcul de stabilitate a unui cadru se parcurg următoarele etape de calcul:

- a) Se realizează un calcul de ordinul I pentru a afla eforturile axiale din barele structurii. Nu se iau în considerare decât eforturile de compresiune;
- b) Se calculează factorii de compresiune pentru barele structurii cu relația:

$$v_{ij} = l_{ij} \sqrt{\frac{N_{ij}}{EI_{ij}}} ; \quad (13.8)$$

- c) Se depistează factorul de compresiune maxim și funcție de acest factor se exprimă ceilalți factori de compresiune. Dacă notăm factorul de compresiune maxim cu " $v$ " sau " $v_{max}$ ", atunci ceilalți factori de compresiune se determină funcție de acesta astfel:

$$v_{ij} = v \frac{l_{ij}}{l} \sqrt{\frac{N_{ij}}{N} \frac{EI}{EI_{ij}}} , \quad (13.9)$$

prin urmare:

$$v_{ij} = f(v) . \quad (13.10)$$

- d) Se stabilește sistemul de bază, corepunzător metodei deplasărilor și se calculează rigiditățile la rotire și momente transmise ale barelor structurii;
- e) Se calculează coeficienții  $r_{ii}$  și  $r_{ji}$ , aplicând relațiile (13.6) și (13.7);
- f) Se determină ecuația de stabilitate prin anularea determinantului coeficienților, relația (13.2);
- g) Se caută, prin încercări, soluția ecuației de stabilitate.

Obs.: În iterația pentru aflarea soluției ecuației de stabilitate se parcurg câțiva pași, după cum urmează:

1. Se impune o soluție pentru factorul de compresiune maxim,  $v$ , după criteriile prezentate în cursul numărul 11, paragraful

11.2, în cadrul observațiilor (punctele 1, 2 și 3). Funcție de acesta se determină ceilalți factori de compresiune.

2. Se calculează parametrii  $K'$ ,  $K^0$ ,  $K''$ ,  $K$  cu relațiile:

$$k' = \frac{3a}{4a^2 - \beta^2}, \quad (13.11)$$

$$k^0 = \frac{1}{a}, \quad (13.12)$$

$$k'' = \frac{3\beta}{4a^2 - \beta^2}, \quad (13.13)$$

$$k' = \frac{1}{2a - \beta}, \quad (13.14)$$

parametrii  $a$  și  $\beta$  se calculează în funcție de factorul de compresiune cu relațiile (9.50 și 9.53)

3. Se determină rigiditățile la rotire și se introduc, spre verificare, în ecuația de stabilitate.

Următorii pași în iterație coincid cu operațiunile expuse la studiul stabilității cadrelor prin metoda matricei de flexibilitate, cursul 11, paragraful 11.2, punctele 4, 5 și 6 din observații.

### 13.1.3. Aplicație

Să se determine încărcarea critică pentru cadrul din figura 13.3.

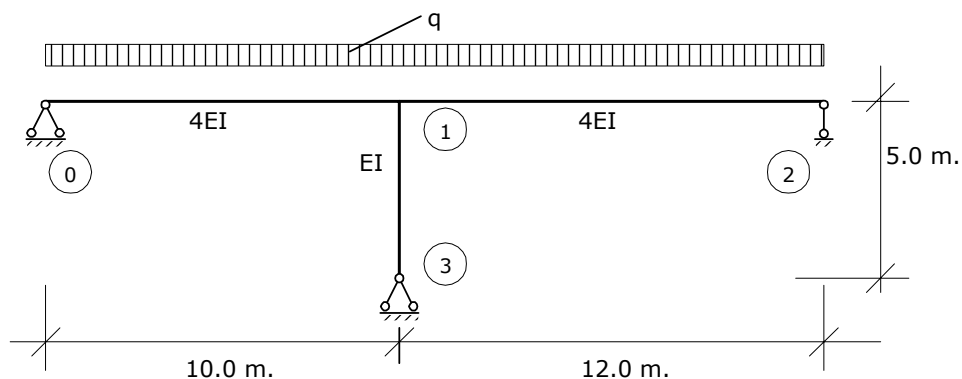


Fig.13.3. Cadru cu noduri fixe

a) Determinarea eforturilor axiale de ordinul I din barele structurii.

Analizând structura propusă spre studiu se constată că este de două ori static nedeterminată, iar dintr-un calcul de ordinul I, aplicând



$z_1 = 1$ , figura 13.5, și evidențierea mometelor din extremitățile barelor ce concură în nodul 1. Momentele de capăt sunt egale cu rigiditățile la rotire de ordinul I pe barele 01 și 12 și de ordinul II pe bara 13, influențată de efortul axial de compresiune din bară.

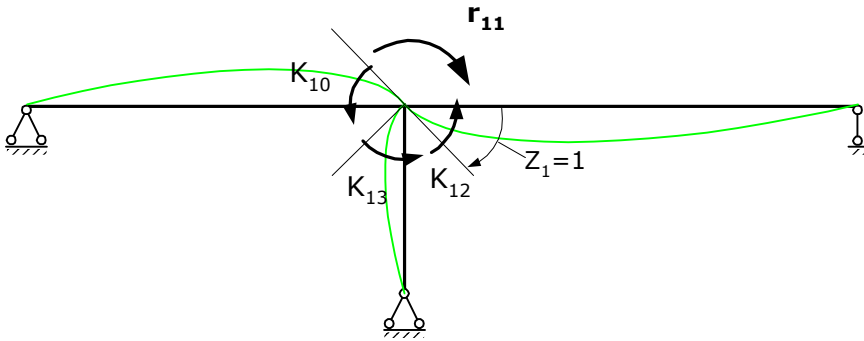


Fig.13.5. Deformata sistemului de bază. Calculul coeficientului  $r_{ii}$

Rigiditatea nodului, egală cu coeficientul  $r_{11}$ , este egal cu suma rigidităților la rotire a extremităților barelor ce concură în nod:

$$r_{11} = \sum_1 k_{ij}$$

sau

$$r_{11} = K_{10} + K_{13} + K_{12}, \quad (13.17)$$

unde

$$K_{10} = \frac{3EI}{l} = \frac{3 \cdot 4EI}{10} = 1.2EI,$$

$$K_{13} = \frac{3EI}{l} K^0 = \frac{3 \cdot EI}{5} K^0 = 0.6EI K^0$$

și

$$K_{12} = \frac{3EI}{l} = \frac{3 \cdot 4EI}{12} = EI.$$

Rezultă

$$r_{11} = (2.2 + 0.6K^0)EI. \quad (13.18)$$

f) Stabilirea ecuației de stabilitate.

Ecuația de stabilitate se obține prin anularea determinantului matrice de rigiditate, relația (13.2), aici:

$$r_{11} = 0$$

sau

$$2.2 + 0.6K^0 = 0. \quad (13.19)$$

g) Determinarea soluției ecuației de stabilitate.

Din ecuația (13.19) rezultă:

$$K^0 = -\frac{2.2}{0.6} = -3.667,$$

dar cunoscând

$$K^0 = \frac{1}{\alpha}$$

se obține pentru parametrul  $\alpha$  valoarea:

$$\alpha = \frac{1}{K^0} = -0.27273.$$

Cum însă parametrul  $\alpha$  se determină cu relația (9.50) se poate scrie:

$$\alpha = \frac{3}{v} \left( \frac{1}{v} - \frac{1}{\operatorname{tg} v} \right) = -0.27273,$$

iar prin încercări, dând valori factorului de compresiune  $v$ , care să verifice relația de mai sus, se ajunge la rezultatul:

$$v_{cr} = 4.158466.$$

În continuare, se folosește relația (13.16) pentru a determina încărcarea critică de pierdere a stabilității cadrului:

$$v_{13} = v_{cr} = l_{13} \sqrt{\frac{13.83 q_{cr}}{EI}} = 4.158466,$$

de unde, pentru

$$EI = 1000 \text{ KNm}^2,$$

rezultă:

$$q_{cr} = 50.01544 \text{ KN}. \quad (13.20)$$

## 13.2. Calculul de ordinul II al cadrelor cu noduri fixe folosind metoda deplasărilor

### 13.2.1. Etape de calcul

În vederea efectuării unui calcul de ordinul II, al unui cadru cu noduri fixe, se parcurg următoarele etape de calcul:

- Se realizează un calcul de ordinul I pentru a determina eforturile axiale din barele structurii. Nu se iau în considerare decât eforturile de compresiune;
- Se calculează factorii de compresiune pentru barele structurii cu relația:

$$\nu_{ij} = l_{ij} \sqrt{\frac{N_{ij}}{EI_{ij}}}; \quad (13.21)$$

- Se stabilește sistemul de bază, corepunzător metodei deplasărilor, se scrie sistemul de ecuații de condiție și se calculează rigiditățile la rotire și momentelor transmise ale barelor structurii:

$$[r_{ij}]\{z_j\} + \{R_{ip}\} = \{0\}' \quad (13.22)$$

unde  $[r_{ij}]$  reprezintă matricea coeficienților,

$\{z_j\}$  - vectorul necunoscutelor, deplasările nodurilor,

și

$\{R_{ip}\}$  - vectorul termenilor liberi;

- Se calculează coeficienții  $r_{ij}$  și  $r_{ji}$ , aplicând relațiile (13.6) și (13.7);
- Se determină termenii liberi  $R_{ip}$ .

Prin definiție un termen liber,  $R_{ip}$ , reprezintă reacțiunea din blocajul de nod  $i$  al sistemului de bază când acesta este acționat de forțele exterioare și este egal cu suma momentelor de încastrare perfectă din extremitățile barelor ce concură în nodul  $i$ . Momentele de încastrare perfectă sunt obținute dintr-un calcul de ordinul II. Fie cadrul din figura 13.4, cadru cu noduri fixe acționat de o sarcină distribuită, iar în figura 13.5 sistemul de bază corespunzător, pe care s-au figurat momentele de încastrare perfectă și termenul liber,  $R_{ip}$ , pentru care se dorește să se evidențieze o relație de calcul.

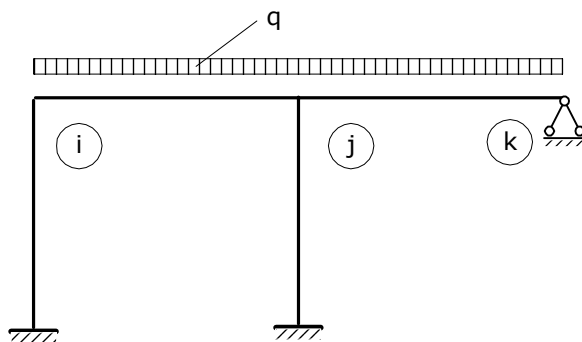


Fig.13.6. Cadru cu noduri fixe

Se consideră un cadru cu noduri fixe, figura 13.6, acționat cu o sarcină uniform distribuită, de intensitate  $q$ , pentru care se cere determinarea termenului liber  $R_{ip}$ . Se realizează deformata sistemului de bază sub acțiunea încărcării, figura 13.7, pe care se evidențiază momentele de încastrare perfectă de ordinul II, pe barele solicitate la compresiune.

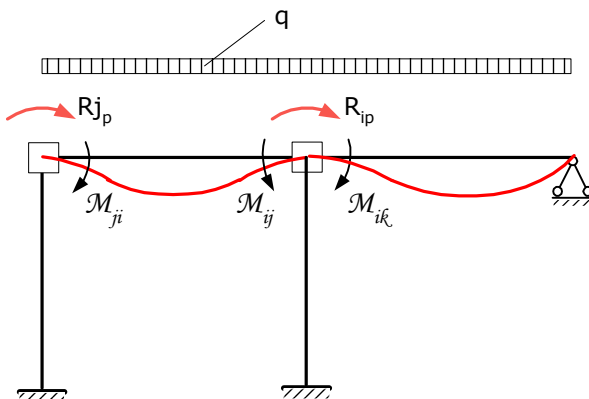


Fig.13.7. Cadru cu noduri fixe.  
Deformata sistemului de bază. Calculul termenilor  
liberi în metoda deplasărilor

Pentru calculul reacțiunii din blocajul de nod, care reprezintă termenul liber  $R_{ip}$ , se exprimă echilibrul static al forțelor din nodul i :

$$\sum_i M_{ij} = 0 \quad (13.22)$$

sau

$$R_{ip} + M_{ik} - M_{ij} = 0,$$

de unde

$$R_{ip} = \sum_i M_{ij} ; \quad (13.23)$$

- f) Se rezolvă sistemul de ecuații de condiție și se trasează diagramele de eforturi finale.

### 13.2.2. Aplicație

Se cere să se traseze diagrama de moment încovoietor pentru cadrul din figura 13.3, cunoscându-se intensitatea sarcinii distribuite  $q = 11.65 \text{ kN/m}$  și valoarea modulului de rigiditate la solicitarea de încovoiere  $EI = 1000 \text{ kNm}^2$ , printr-un calcul de ordinul II.

Pentru rezolvarea problemei se parcurg următoarele etape de calcul:

- a) Determinarea eforturilor axiale de ordinul I din barele structurii.

La aplicația 13.1.4 s-au determinat eforturile axiale din barele cadrului în cazul analizei stabilității acestuia, iar eforturile axiale erau funcție de intensitatea sarcinii distribuite. Cunoscând această intensitate, eforturile axiale devin:

$$N_{13} = 13.83q = 13.83 \cdot 11.65 = 161.119 \text{ kN}, \quad (13.24)$$

$$N_{01} = -0.24q = -0.24 \cdot 11.65 = -2.796 \text{ kN},$$

iar neluând în considerare efortul axial de întindere din bara 01, se vor continua calculele ținând cont numai de efortul axial din bara 13.

- b) Calculul factorilor de compresiune,  $v_{ij}$ .

Se folosește relația (13.8). Luând în considerare caracteristicile geometrice și fizice ale barei comprimate și efortul axial determinat în etapa precedentă rezultă:

$$v_{13} = l_{13} \sqrt{\frac{N_{13}}{EI_{13}}} = 5 \sqrt{\frac{161.119}{EI}} = 2.00698; \quad (13.25)$$

- c) Exprimarea factorilor de compresiune funcție de factorul de compresiune maxim

- d) Stabilirea sistemului de bază.

În figura 13.4, din aplicația 13.1.4, este prezentat sistemul de bază al cadrului luat în analiză;

- e) Scrierea sistemului de ecuații de condiție.



Forma generală a sistemului de ecuații în metoda deplasărilor are forma (relația 11.22):

$$[r_{ij}]\{z_j\} + \{R_{ip}\} = \{0\}'$$

iar în cazul acestei probleme, echilibrul este exprimat numai prin intermediul unei singure ecuații de echilibru, deoarece cadrul face parte din categoria cadrelor cu noduri fixe și are un singur nod:

$$r_{11}Z_1 + R_{1p} = 0 ; \quad (13.26)$$

f) Calculul coeficientului  $r_{11}$ .

Se utilizează relația (13.6), care aici devine:

$$r_{11} = \sum_1 K_{1j} .$$

sau

$$r_{11} = K_{10} + K_{13} + K_{12} , \quad (13.17)$$

unde

$$K_{10} = \frac{3EI}{l} = \frac{3 \cdot 4EI}{10} = 1.2EI = 1200\text{KNm}$$

$$K_{13} = \frac{3EI}{l} K^0 = \frac{3 \cdot EI}{5} K^0 = 0.6EIK^0 ,$$

dar

$$K^0 = \frac{1}{a} ,$$

conform relației (9.59), aici ia valoarea

$$a = \frac{3}{v} \left( \frac{1}{v} - \frac{1}{\text{tg}v} \right) = \frac{3}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\text{tg}2} \right) = 1.5 \left( 0.5 - \frac{1}{-2.1453394} \right) = 1.44414998$$

de unde

$$K^0 = 0.6924488$$

obținem pentru rigiditatea  $K_{13}$  valoarea

$$K_{13} = 415.469312\text{KNm}$$

și

$$K_{12} = \frac{3EI}{l} = \frac{3 \cdot 4EI}{12} = EI = 1000\text{KNm} .$$

Rezultă:

$$r_{11} = 2615.469312 \text{KNm} . \quad (13.18)$$

g) Calculul termenului liber  $R_{1p}$ .

În vederea determinării termenului liber  $R_{1p}$  se poate aplica direct relația (13.23) sau se exprimă echilibrul nodului i conform figurii 13.6. Deci:

$$R_{1p} = -\sum_1 M_{1j} = -(M_{01} + M_{12})$$

unde

$$M_{10} = \frac{ql^2}{8} = \frac{11.65 \cdot 10^2}{8} = -145.625 \text{KNm}$$

și

$$M_{12} = \frac{ql^2}{8} = \frac{11.65 \cdot 12^2}{8} = 209.700 \text{KNm} .$$

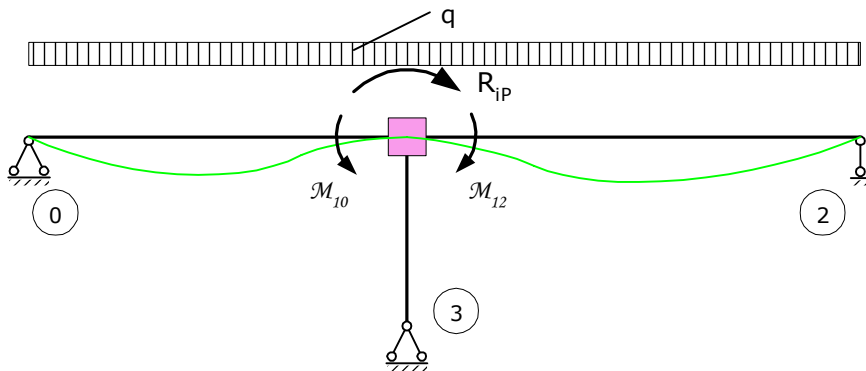


Fig. 13.8. Deformata sistemului de bază sub acțiunea sarcinii uniform distribuite,  $q$

Rezultă:

$$R_{1p} = -64.075 \text{KNm} .$$

h) Aflarea soluția ecuației de condiție.

Din ecuația (13.26) se determină soluția:

$$Z_1 = -\frac{R_{1p}}{r_{11}} = -\frac{-64.075}{2615.469312} = 0.024498471 .$$

i) Determinarea momentelor de capăt și trasarea digramei finale de momente încovoietoare.

Se folosesc expresii ale momentelor încovoietoare, obținute prin suprapunerea efectelor, folosind cele două deformatoare prezentate în figurile 13.5 și 13.8:

$$M_{10} = -(K_{10}Z_1 + M_{10}) = 175.023\text{KNm}$$

$$M_{12} = -K_{12}Z_1 + M_{12} = 185.201\text{KNm}$$

$$M_{13} = -K_{13}Z_1 = -10.178\text{KNm}.$$

Diagrama finală de moment încovoietor este trasată în figura 13.9.

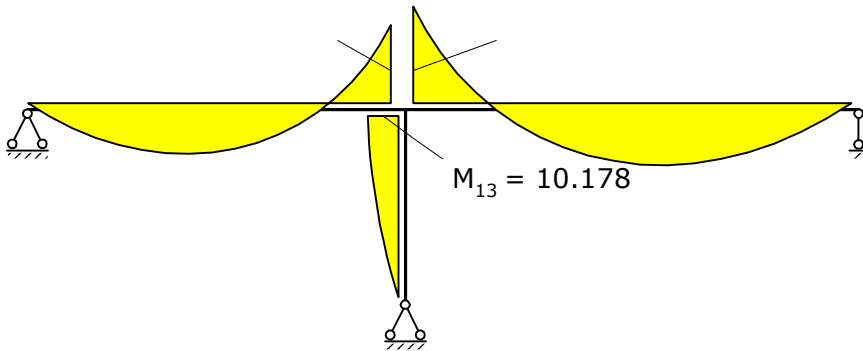


Fig. 13.9. Diagrama finală de moment încovoietor

# CURSUL 14

## **CALCULUL DE ORDINUL II ȘI DE STABILITATE. CADRE CU NODURI DEPLASABILE**

### **14.1. Metoda deplasărilor**

În cursul numărul 13 s-a făcut o prezentare generală a metodei deplasărilor pentru structurile cu noduri fixe.

Cadrele cu noduri deplasabile sunt acele sisteme de bare la care, prin deformare, sub acțiunea încărcărilor exterioare se produc atât deplasări unghiulare (ca la cadrele cu noduri fixe), cât și deplasări liniare

(translații), acestea din urmă sunt împiedicate să se deplaseze, într-un sistem de bază, de blocaje sub formă de reazeme simple.

Prin urmare, legătura care se introduce pe direcția unui grad de libertate, reazemul simplu, împiedică deplasările tuturor nodurilor antrenate în deplasare pe direcția gradului de libertate. O asemenea legătură permite rotirea nodului în care se introduce. De asemenea, este de menționat faptul că blocajul de nod, în cazul cadrelor cu noduri deplasabile, permite deplasarea liniară în cadrul gradului de libertate a lanțului cinematic din care face parte.

Se mai remarcă faptul că necunoscutele, egale cu numărul nodurilor rigide, în cazul cadrelor cu noduri deplasabile, sunt de două tipuri: deplasări unghiulare ale nodurilor, notate  $Z_i$  și deplasări liniare, notate  $\dots, Z_a, Z_b, \dots$ , egale cu numărul gradelor de libertate.

Sistemul de bază va fi încărcat cu forțele exterioare și necunoscutele – deplasări liniare și unghiulare. Acestea din urmă sunt aplicate pe sistemul de bază ca cedări de reazeme.

Sub acțiunea încărcărilor exterioare și a deplasărilor nodurilor în legăturile suplimentare (blocaje de nod și reazeme simple corespunzătoare gradelor de libertate) apar reacțiuni. Reacțiunile totale din cele două tipuri de blocaje  $i$  și  $a$  (momente și forțe) se determină prin suprapunerea efectelor:

$$R_i = r_{i1}Z_1 + r_{i2}Z_2 + \dots + r_{ii}Z_i + \dots + r_{in}Z_n + r_{ia}Z_a + r_{ib}Z_b + \dots + R_{ip}, \quad (14.1)$$

$$R_a = r_{a1}Z_1 + r_{a2}Z_2 + \dots + r_{ai}Z_i + \dots + r_{an}Z_n + r_{aa}Z_a + r_{ab}Z_b + \dots + R_{ap}. \quad (14.2)$$

Ecuatiile de echilibru exprimă condiția de echilibru static și se materializează prin condiția ca reacțiunile totale din cele două tipuri de legături suplimentare, care în structura reală nu există, să fie egale cu zero:

$$R_i = 0, R_a = 0. \quad (14.3)$$

În concluzie:

- sistemul de bază în metoda deplasărilor este unic;
- sistemul de bază cuprinde două tipuri de bare cu legături perfecte la capete;
- necunoscutele metodei deplasărilor, notate cu  $Z_i$  și  $Z_a$ , sunt deplasări unghiulare și liniare, iar coeficienții,  $r_{ij}$ ,  $r_{ia}$ ,  $r_{ai}$  și  $r_{ab}$  și termenii liberi  $R_{ip}$  și  $R_{ap}$  sunt reacțiuni – moment și forță, deci forțe generalizate;
- sistemul de ecuații are expresia, sub forma generală:

$$\sum_{j=1}^n r_{ij} Z_j + R_{ip} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (14.4)$$

iar sau formă matriceală:

$$[r_{ij}][Z_j] + \{R_{ip}\} = \{0\}' \quad (14.5)$$

unde:  $[r_{ij}]$  reprezintă matricea coeficienților sau matricea de rigiditate a structurii;

$\{R_{ip}\}$  - vectorul termenilor liberi;

$\{Z_i\}$  - vectorul necunoscutelor.

## 14.2. Relații diferențiale între eforturi și încărcări

### 14.2.1. Echilibrul forțelor exprimat în raport cu poziția inițială

Se consideră un element de bară de lungime  $dx$  acționat de un sistem de sarcini distribuite reduse la rezultante, iar pe fețele laterale (în extremități) ale barei, bara este acționată de eforturile corespunzătoare:  $N, M, T$  și respectiv:  $N + dN, M + dM, T + dT$ , figura 14.1.

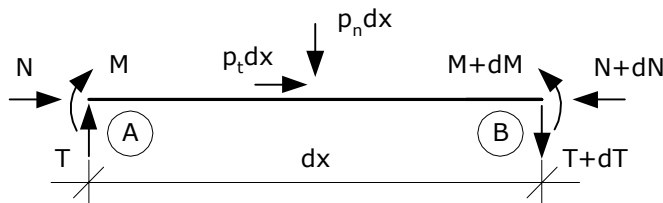


Fig.14.1. Bara dreaptă, în poziția inițială nedeformată, acționată de forțe exterioare și eforturi pe fețele secțiunilor extreme

Echilibrul static al sistemului de forțe se exprimă prin intermediul a trei ecuații:

$$\sum X = 0; \quad N + p_t dx - (N + dN) = 0, \quad (14.6)$$

$$\sum Y = 0; \quad T + p_n dx - (T + dT) = 0, \quad (14.7)$$

$$\sum M = 0; \quad M + T dx - p_n dx \frac{dx}{2} - (M + dM) = 0. \quad (14.8)$$

Rezolvând sistemul de ecuații format din cele trei ecuații de mai sus se obțin următoarele expresii între eforturi și încărcări:

$$\frac{dN}{dx} = p_t, \quad (14.9)$$

$$\frac{dT}{dx} = -p_n, \quad (14.10)$$

$$\frac{dM}{dx} = T. \quad (14.11)$$

Obs. Nu s-a ținut cont de termenul  $p_t dx \frac{dx}{2}$ .

#### 14.2.2. Echilibrul forțelor exprimat în raport cu poziția deplasată

Se consideră un element de bară de lungime  $dx$  acționat de un sistem de sarcini distribuite reduse la rezultante, iar pe fețele laterale (în extremități) ale barei, bara este acționată de eforturile corespunzătoare:  $N, M, T$  și respectiv:  $N + dN, M + dM, T + dT$ , figura 14.2. Bara se găsește într-o poziție deformată în raport cu care se va exprima echilibrul forțelor.

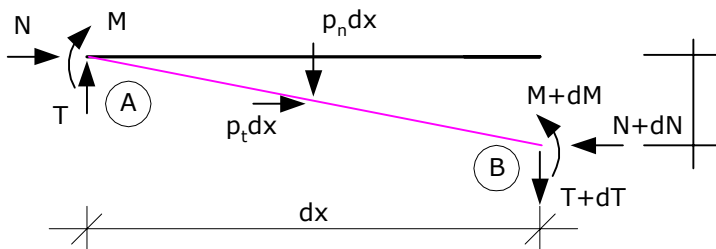


Fig.14.2. Bara dreaptă, în poziție deformată, acționată de forțe exterioare și eforturi pe fețele secțiunilor extreme

Prin exprimarea echilibrului se obține următorul sistem de trei ecuații:

$$\sum X = 0; \quad N + p_t dx - (N + dN) = 0, \quad (14.12)$$

$$\sum Y = 0; \quad T + p_n dx - (T + dT) = 0, \quad (14.13)$$

$$\sum M = 0; \quad M + T dx + p_t dx \frac{dx}{2} - p_n dx \frac{dx}{2} + N dv - (M + dM) = 0. \quad (14.14)$$

Prin rezolvarea sistemului de ecuații de echilibru static și ținând cont de termenii:  $p_t dx \frac{dv}{2}$  și  $p_n dx \frac{dx}{2}$ , rezultă relații dintre eforturi și încărcări:

$$\frac{dN}{dx} = p_t, \quad (14.15)$$

$$\frac{dT}{dx} = -p_n, \quad (14.16)$$

$$\frac{dM}{dx} = T + N \frac{dv}{dx}. \quad (14.17)$$

#### 14.2.3. Echilibrul forțelor exprimat în raport cu poziția inițială. Bara încărcată suplimentar cu un cuplu distribuit, $mdx$

Se consideră un element de bară de lungime  $dx$  acționat de un sistem de sarcini distribuite, forță și cuplu reduse la rezultante, iar pe fețele laterale (în extremități) ale barei se introduc și eforturile corespunzătoare:  $N, M, T$  și respectiv:  $N + dN, M + dM, T + dT$ , figura 14.3.

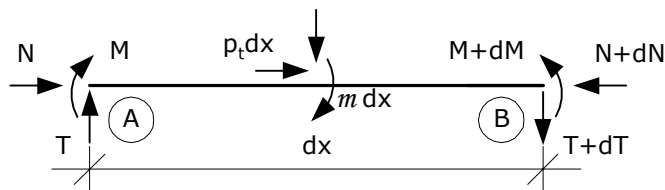


Fig.14.3. Bara dreaptă, în poziție inițială, acționată de forțe exterioare și eforturi pe fețele secțiunilor extreme

Se exprimă echilibrul forțelor în raport cu poziția inițială a elementului de bară. Se deduce sistemul de ecuații de echilibru static:

$$\sum X = 0; \quad N + p_t dx - (N + dN) = 0, \quad (14.18)$$

$$\sum Y = 0; \quad T + p_n dx - (T + dT) = 0, \quad (14.19)$$

$$\sum M = 0; \quad M + T dx - p_n dx \frac{dx}{2} + m dx - (M + dM) = 0. \quad (14.20)$$

Prin rezolvarea sistemului de ecuații se obțin relații diferențiale între eforturi și încărcări de forma:

$$\frac{dN}{dx} = p_t, \quad (14.21)$$



$$\frac{dT}{dx} = -p_n, \quad (14.22)$$

$$\frac{dM}{dx} = T + m. \quad (14.23)$$

#### 14.2.4. Concluzii privind exprimarea echilibrului barei drepte încărcată cu forțe exterioare și eforturi în secțiunile de capăt

1. Comparând celor trei situații expuse anterior, prin care s-a exprimat echilibrul unui element de bară acționat de forțe exterioare și eforturile din extremități, în urma căruia au rezultat trei grupuri de relații diferențiale se constată:

a) relația diferențială  $\frac{dN}{dx} = p_t$  care exprimă legătura dintre

încărcarea exterioară și efortul axial (N) sunt identice în toate cele trei situații (v. paragrafele: 14.2.1, 14.2.2 și 14.2.3), relațiile: (14.9), (14.15), și (14.21), indiferent dacă echilibrul este exprimat în raport cu poziția inițială sau cu cea deformată;

b) relația diferențială  $\frac{dT}{dx} = -p_n$  care exprimă legătura dintre

încărcarea exterioară și forța tăietoare (T) sunt, de asemenea, identice în toate cele trei situații (v. paragrafele: 14.2.1, 14.2.2 și 14.2.3) relațiile: (14.10), (14.16), și (14.22), indiferent dacă echilibrul este exprimat în raport cu poziția inițială sau cea deformată;

c) relațiile diferențiale, (14.11) și (14.17), dintre momentul încovoietor din secțiunile de capăt și încărcări, în cazul exprimării echilibrului în raport cu poziția inițială sau cu poziția deformată a elementului de bară diferă, dacă exprimăm echilibrul în raport cu poziția inițială a elementului de bară sau cu poziția deformată:  $\frac{dM}{dx} = T$  și  $\frac{dM}{dx} = T + N \frac{dv}{dx}$ ;

2. Referitor la relațiile diferențiale dintre momentul încovoietor și încărcări, (14.17) și (14.23), în cazul exprimării echilibrului în raport cu poziția deformată a elementului de bară, paragraful (14.2.2) și, respectiv, în raport cu poziția inițială a acestuia, dar încărcat elementul de bară cu un cuplu distribuit, paragraful

(14.2.3):  $\frac{dM}{dx} = T + N \frac{dv}{dx}$  și  $\frac{dM}{dx} = T + m$ , constatăm că și acestea diferă.

Pentru ca relațiile de mai sus să fie identice înseamnă ca trebuie să existe egalitatea:

$$N \frac{dv}{dx} = m \quad (14.24)$$

și astfel, constatăm că putem exprima echilibrul elementului de bară încărcat cu sarcinile distribuite și cu un cuplu distribuit de intensitate dată de relația (14.24), în raport cu poziția inițială nedeformată.

3. Pentru a valorifica constatarea de mai sus, vom analiza relația (14.24) prin care se determină intensitatea cuplului distribuit, ce se adaugă ca sarcină exterioară suplimentară, în solicitarea elementului de bară.

Se exprimă raportul  $\frac{dv}{dx}$  funcție de rotirea  $\phi$  unei secțiuni a barei:

$$\frac{dv}{dx} = \operatorname{tg} \phi \approx \phi, \quad (14.25)$$

iar intensitatea cuplului suplimentar, din expresia (14.25), se calculează cu relația:

$$m = N\phi. \quad (14.27)$$

În consecință, încărcarea suplimentară  $m$  este funcție de deformată structurii,  $v, \phi$  care, în prima etapă de soluționare a problemei, este necunoscută. De aceea, se exprimă deformată și, implicit, încărcarea suplimentară  $m$ , în funcție de necunoscutele problemei, specifice metodei deplasărilor, care se determină, într-o altă etapă, prin rezolvarea sistemului de ecuații de condiție.

Nodurile unei bare, dintr-un cadru cu noduri deplasabile, vor descrie, în procesul de deformare, atât deplasări liniare, cât și deplasări unghiulare (v. figura 14.4).

Deplasarea relativă a nodurilor barei  $ij$ , detașată dintr-un sistem de bază al unui cadru cu noduri fixe, poate fi definită prin intermediul rotirii axei barei, notată  $\Psi$ . Rotirea unei secțiuni oarecare  $\phi$  poate fi descompusă în două componente, astfel se scrie relația:

$$\phi = \Psi + \phi, \quad (14.28)$$

unde componenta  $\varphi$  reprezintă rotirea secțiunii măsurată în raport cu axa înclinată a barei  $ij$ .

Se introduce relația (14.28) în (14.27) și rezultă:

$$m = N\Psi + N\varphi, \quad (14.29)$$

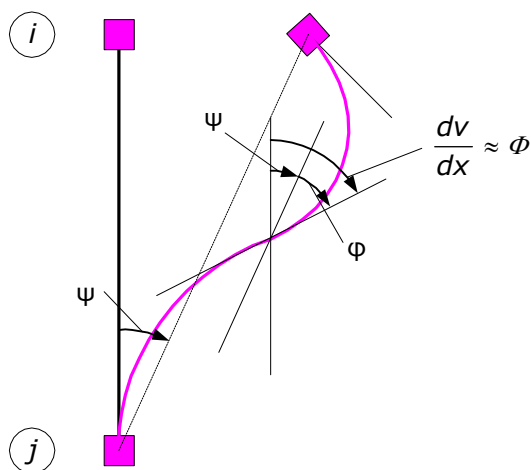


Fig.14.4. Deformata barei  $ij$  aparținând unui cadru cu noduri deplasabile

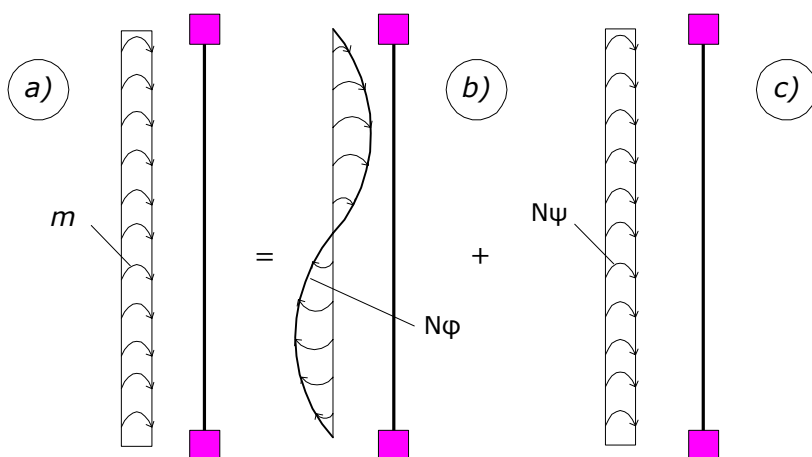


Fig.14.5. Barei  $ij$  dintr-un sistem de bază acționat: a) cu un cuplu distribuit de intensitate  $m$ ; b) cuplu distribuit de intensitate  $N\varphi$ ; c) cuplu distribuit de intensitate  $N\psi$

cea ce corespunde descompunerii cuplului suplimentar în alte două cupluri distribuite:  $N\Psi$  și  $N\phi$ .

Și, în consecință, încărcarea suplimentară a unei bare, extrasă dintr-un cadru cu noduri deplasabile, figura 14.5, se va compune în doua componente:

- a) o încărcare cu cupluri distribuite, de intensitate  $N\Psi$  ;
- b) o încărcare cu cupluri distribuite, de intensitate  $N\phi$  .

În cazul primei situații de încărcare, figura 14.6, bara înastrată perfect în noduri, în ambele extremități și acționată de un cuplu uniform distribuit, evidențiază o diagramă de moment încovoietor, conform Staticii Construcțiilor, identic nulă, iar încărcarea poate fi înlocuită cu două forțe concentrate de intensități egale cu  $N\Psi$  . Sensurile acestor forțe, care se aplică în nodurile barei, sunt alese astfel încât să aibă același sens cu rotirea  $\Psi$  a barei.

În concluzie, calculul de ordinul II și de stabilitate se poate efectua exprimând echilibrul forțelor în raport cu poziția inițială nedeformată a structurii, dar încărcând, în același timp, barele cu un cuplu distribuit, care se înlocuiește, în procesul de calcul, cu două forțe concentrate, de intensitate  $N\Psi$  , aplicate în noduri, normal pe axa barei. Aceste forțe se aplică numai în nodurile unei bare ce suferă rotații,  $\Psi$  reprezentând rotirea barei respective, iar  $N$  efortul din bara respectivă.

### 14.3. Calculul de ordinul II al cadrelor cu noduri deplasabile

#### 14.3.1. Etape de calcul

În vederea efectuării unui calcul de ordinul II al unui cadru cu noduri deplasabile se parcurg următoarele etape de calcul:

- a) Se realizează un calcul de ordinul I pentru a determina eforturile axiale din barele structurii. Nu se iau în considerare decât eforturile de compresiune;
- b) Se calculează factorii de compresiune pentru barele structurii cu relația:

$$v_{ij} = l_{ij} \sqrt{\frac{N_{ij}}{EI_{ij}}} ; \quad (13.21)$$

- c) Se stabilește sistemul de bază, corespunzător metodei deplasărilor, se scrie sistemul de ecuații de condiție;

$$[r_{ij}]\{z_j\} + \{R_{ip}\} = \{0\}' \quad (13.22)$$

unde  $[r_{ij}]$  reprezintă matricea coeficienților (matricea de rigiditate a structurii),

$\{z_j\}$  - vectorul necunoscutelor, deplasările nodurilor,

și  $\{R_{ip}\}$  - vectorul termenilor liberi;

În cazul cadrelor cu noduri deplasabile, de exemplu structura din figura 14.7, matricea coeficienților notată  $[r_{ij}]$  cuprinde mai multe tipuri de coeficienți, spre deosebire de cadrele cu noduri fixe. Astfel, distingem:

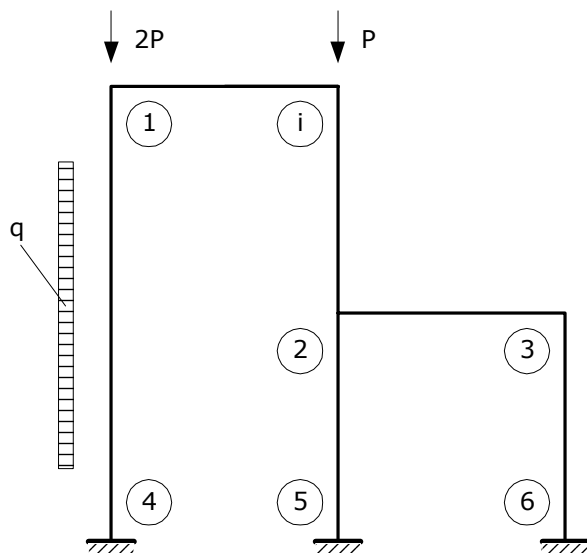


Fig.14.7. Cadru cu noduri deplasabile

- i. coeficienții  $r_{ii}$  și  $r_{ji}$ , calculați cu relații identice cu cele găsite la studiul cadrele cu noduri fixe;
- ii.  $r_{bb}$  și  $r_{ab}$  - coeficienți principali care se determină ca reacțiuni în blocajele grade de libertate (reazeme simple) ale sistemului de bază;
- iii.  $r_{ib}$  și  $r_{bi}$  - coeficienți laterali referitor la blocajele de nod, respectiv, blocajele grade de libertate.

Vectorul termenilor liberi,  $\{R_{ip}\}$ , cuprinde două tipuri de termeni liberi, și anume:

- i.  $R_{ip}$  - termeneni liberi identici cu cei determinați la cadrele cu noduri fixe, se determină cu relația (13.23);
  - ii.  $R_{bp}$  - reacțiuni din blocaje de nod grad de libertate ale sistemului de bază.
- d) Se determină coeficienții matricei de rigiditate (coeficienților):
- i. coeficienții  $r_{ii}$  și  $r_{ji}$  se calculează cu relațiile (13.6) și (13.7);
  - ii. pentru a calcula coeficienții  $r_{bb}$  și  $r_{ib}$  se realizează sistemul de bază corespunzător, figura 14.8.

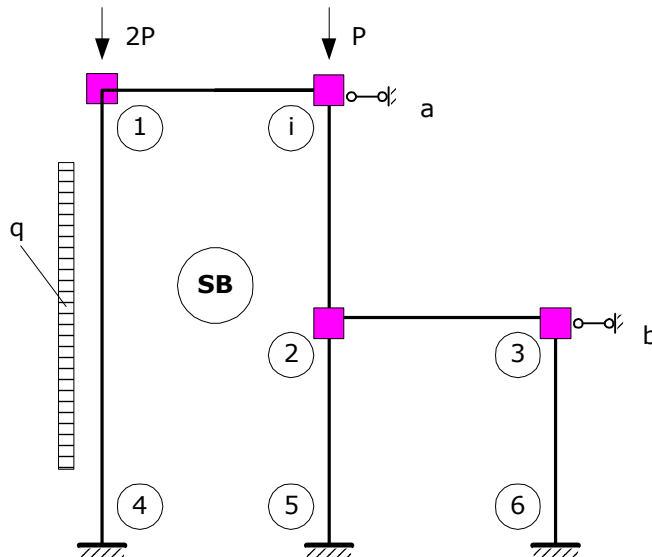


Fig.14.8. Cadru cu noduri deplasabile. Sistem de bază

Folosind sistemul de bază, stabilit și prezentat în figura 14.8, se definesc cei doi coeficienți. Coeficientul principal  $r_{bb}$  reprezintă reacțiunea din blocajul grad de libertate  $b$ , când în acest blocaj se produce o cedare de reazem, deplasare liniară, egală cu unitatea, iar coeficientul  $r_{ib}$  se identifică cu reacțiunea din blocajul de nod  $i$ , când în blocajul grad de libertate  $b$ , al sistemului de bază, s-a produs o deplasare liniară, cedare de reazem, egală cu unitatea.

În vederea determinării acestor coeficienți se produce o cedare de reazem în blocajul grad de libertate  $b$ , egală cu unitatea, figura 14.9.

Reacțiunile  $r_{bb}$  și  $r_{ib}$  se determină exprimând echilibrul static prin intermediul unei ecuații de moment, referitor la nodul  $i$ , respectiv, a unei ecuații de lucru mecanic virtual pentru gradul de libertate  $b$ , conform figurii 14.10.

Se obțin următoarele ecuații de echilibru:

$$\sum_i M = 0;$$

și

$$r_{ib} + \bar{K}_{i2}^{\Psi} \Psi_{i2}^b = 0 \quad (14.23)$$

$$\sum_b MV = 0;$$

sau

$$r_{bb} \cdot 1 - (\bar{K}_{14}^{\Psi} \Psi_{14}^b + \bar{K}_{41}^{\Psi} \Psi_{14}^b) \Psi_{14}^b - (\bar{K}_{i2}^{\Psi} \Psi_{i2}^b + \bar{K}_{2i}^{\Psi} \Psi_{i2}^b) \Psi_{i2}^b + N_{14} \Psi_{14}^b \cdot 1 + N_{i2} \Psi_{i2}^b \cdot 1 = 0 \quad (14.24)$$

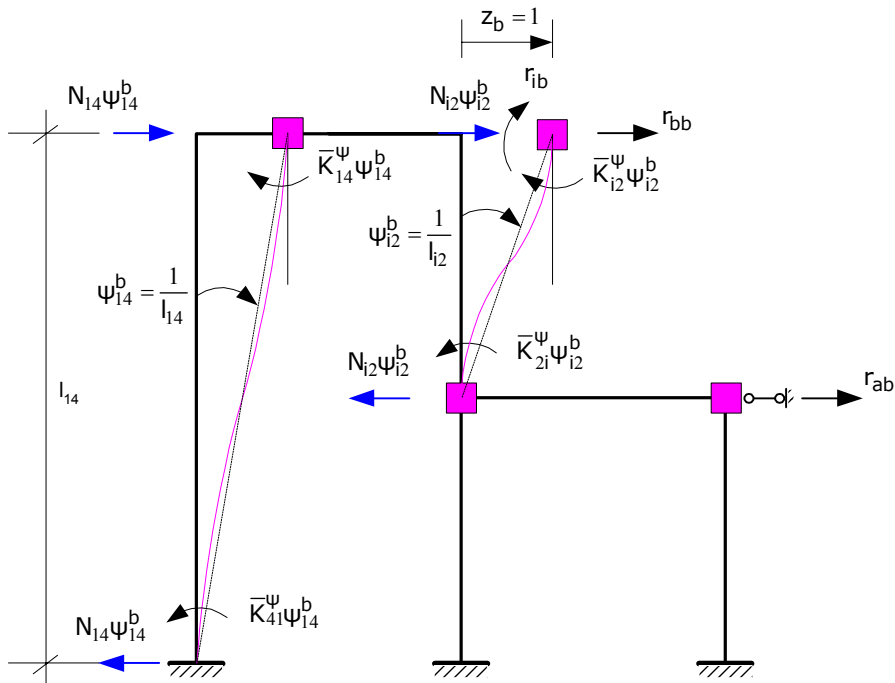


Fig.14.9. Cadru cu noduri deplasabile. Deformata sistemului de bază corespunzătoare gradului de libertate "b"

Rezolvând ecuațiile (14.23) și (14.24) se evidențiază relațiile de calcul a celor doi coeficienți:  $r_{ib}$  și  $r_{ib}$ . Acestea sunt:

$$r_{ib} = -\bar{K}_{i2}^{\Psi} \Psi_{i2}^b \quad (14.25)$$

și

$$r_{bb} = (\bar{K}_{14}^{\Psi} \Psi_{14}^b + \bar{K}_{41}^{\Psi} \Psi_{14}^b) \Psi_{14}^b + (\bar{K}_{i2}^{\Psi} \Psi_{i2}^b + \bar{K}_{2i}^{\Psi} \Psi_{i2}^b) \Psi_{i2}^b - N_{14} \Psi_{14}^b - N_{i2} \Psi_{i2}^b. \quad (14.26)$$

iii. coeficientul  $r_{ab}$ .

Prin definiție coeficientul  $r_{ab}$  reprezintă reacțiunea din blocajul grad de libertate  $b$  când pe sistemul de bază, în blocajul grad de libertate  $b$ , se produce o cedare de reazem egală cu unitatea.

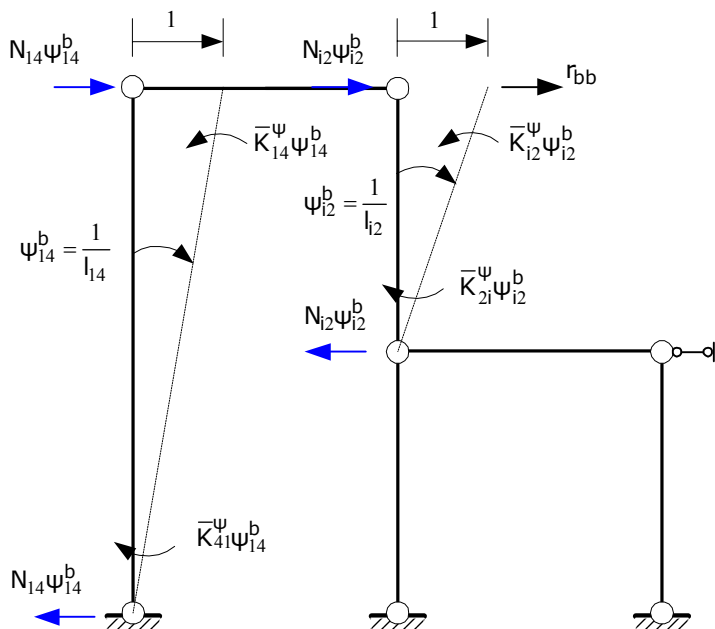


Fig.14.10. Cadru cu noduri deplasabile. Deplasata în gradul de libertate "b"

Situația de încărcare definită mai sus este desenată în figura 14.9, iar pentru a afla relația de calcul a coeficientului  $r_{ab}$  se realizează deplasata corespunzătoare gradului de libertate  $a$ , încăcată cu forțele și cuplurile din deformată sistemului de bază, din deformată sistemului prezentată în figura 14.11.

Sistemul de forțe din deformată  $b$  parcurgând deplasările specifice deplasatei  $a$  vor produce un lucru mecanic virtual. Egalarea



acestui lucru virtual cu zero evidențiază o ecuație de echilibru, care prin rezolvare va pune în evidență expresia de calcul a coeficientului  $r_{ab}$ .

Deci:

$$\sum_a L MV = 0;$$

sau

$$r_{ab} \cdot 1 + (\bar{K}_{i2}^{\Psi} \Psi_{i2}^b + \bar{K}_{2i}^{\Psi} \Psi_{i2}^b) \Psi_{i2}^a - N_{i2} \Psi_{i2}^b \cdot 1 = 0 \quad (14.27)$$

și

$$r_{ab} = -(\bar{K}_{i2}^{\Psi} \Psi_{i2}^b + \bar{K}_{2i}^{\Psi} \Psi_{i2}^b) \Psi_{i2}^a + N_{i2} \Psi_{i2}^b. \quad (14.28)$$

iv. coeficientul  $r_{bi}$ .

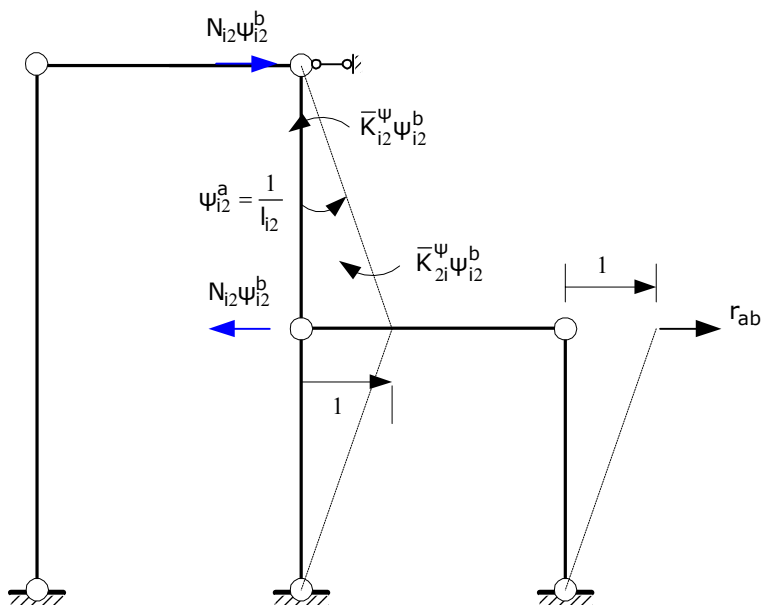


Fig.14.11. Cadru cu noduri deplasabile. Deformată în gradul de libertate "a"

Semnificația fizică a coeficientului  $r_{bi}$  este următoarea: reacțiunea forță din blocajul grad de libertate b, când în blocajul de nod i al sistemului de bază se produce o cedare de reazem, deplasare unghiulară, egală cu unitatea. Deplasata sistemului de bază corespunzătoare cedării de reazem a blocajului i este prezentată în figura 14.12, iar deplasata sistemului obținută prin introducerea de articulații în toate nodurile rigide și reazemele încastrate ale structurii

date, corespunzătoare gradului de libertate  $b$ , este desenată în figura 14.13.

Pentru a calcula coeficientul  $r_{bi}$  se scrie lucrul mecanic al forțelor de pe deformată sistemului de bază, referitoare la cedarea blocajului de nod  $i$ , parcurgând deplasările din deplasata  $b$ .

Rezultă:

$$\sum_b MV = 0;$$

sau

$$r_{bi} \cdot 1 + (K_{i2} + M_{tr})\Psi_{i2}^b = 0 \quad (14.29)$$

și

$$r_{bi} = -(K_{i2} + M_{tr})\Psi_{i2}^b. \quad (14.30)$$

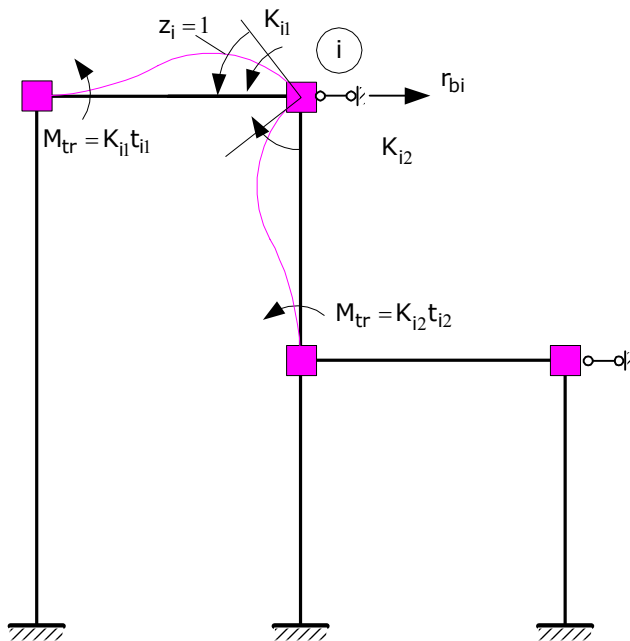


Fig.14.12. Cadru cu noduri deplasabile. Deformată sistemului de bază produsă de cedarea de blocaj de nod "i" egală cu unitatea (deplasare unghiulară)

$$\sum_b MV = 0;$$

sau

$$r_{bi} \cdot 1 + (K_{i2} + M_{tr})\Psi_{i2}^b = 0 \quad (14.29)$$

și

$$r_{bi} = -(K_{i2} + M_{tr})\Psi_{i2}^b. \quad (14.30)$$

Obs. În ecuațiile de mai sus, rigiditățile au expresiile:

$$\bar{K}_{ij}^{\Psi} = \frac{6EI}{l} K,$$

pentru bara dublu încastrată;

$$\bar{K}_{ij}^{\Psi} = \frac{3EI}{l} K^0,$$

pentru bara încastrată simplu rezemată,

unde: 
$$K = \frac{1}{2a - \beta}$$

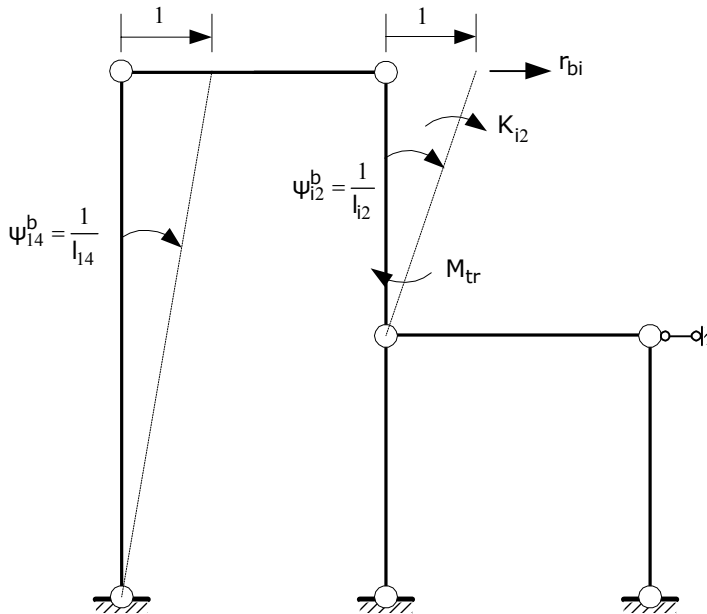


Fig.14.13. Cadru cu noduri deplasabile. Deplasata sistemului în gradul de libertate "b". Calculul coeficientului  $r_{bi}$

și

$$K_0 = \frac{1}{a}.$$

e) Se determină termenii liberi:  $R_{ip}$  și  $R_{bp}$  :

- v. termenul liber  $R_{ip}$  a fost analizat la cadrele cu noduri fixe, relația (13.23);
- vi. termenul liber  $R_{bp}$ .

Termenul liber  $R_{bp}$  reprezintă reacțiunea forță din blocajul grad de libertate  $b$ , când sistemul de bază este acționat cu forțele exterioare date.

În vederea determinării acestui termen liber, se desenează deformata sistemul de bază, sub acțiunea forțelor și se evidențiază momentele de încastrare perfectă, figura 14.14. Termenul liber se află prin rezolvarea unei ecuații de lucru mecanic virtual. Lucrul mecanic virtual va fi exprimat de forțele exterioare și momentele de încastrare perfectă, parcurgând deplasările corespunzătoare din deplasata gradului de libertate  $b$ , figura 14.15. Ecuația de lucru mecanic este următoarea:

$$\sum_b MV = 0;$$

sau

$$R_{bp} \cdot 1 + ql \cdot \delta + (m_{14} + m_{41})\Psi_{14}^b = 0 \quad (14.31)$$

și

$$R_{bp} = -ql \cdot \delta - (m_{14} + m_{41})\Psi_{14}^b, \quad (14.32)$$

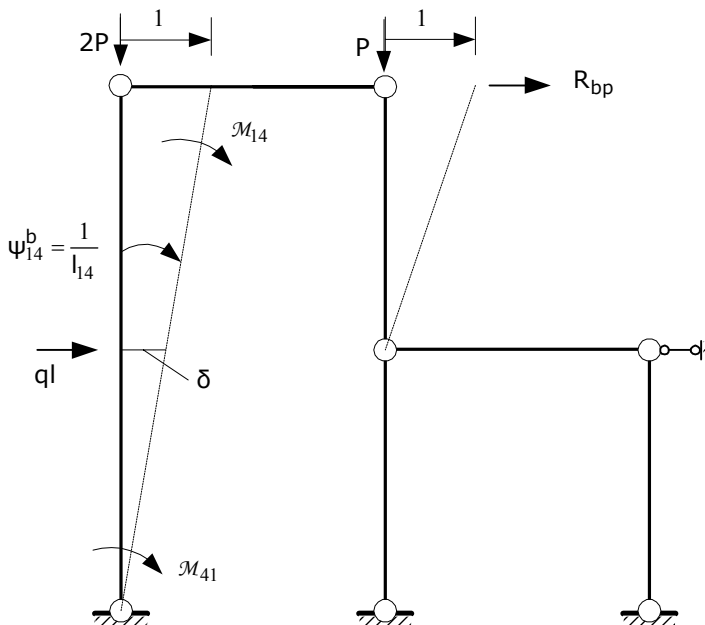


Fig.14.15. Cadru cu noduri deplasabile. Deplasata sistemului în gradul de libertate "b". Calculul termenului liber  $R_{bp}$

unde:  $m_{14}$  și  $m_{41}$  sunt momente de încastrare perfectă obținute printr-un calcul de ordinul II,

$$\delta = \frac{1}{2}.$$

- f) Se rezolvă sistemul de ecuații de condiție, relația (14.23) și trasează diagramale finale de eforturi prin suprapunerea efectelor.

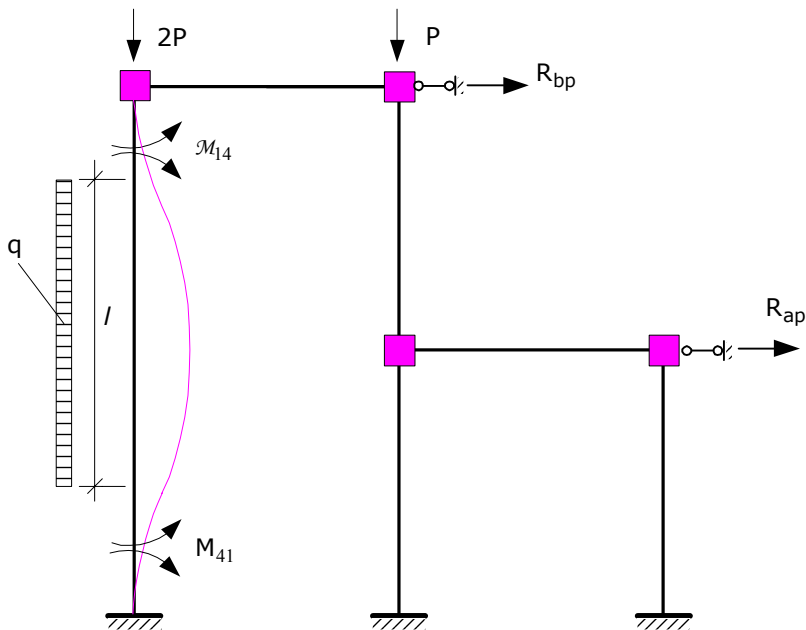


Fig.14.14. Cadru cu noduri deplasabile. Deformata sistemului de bază produsă de acțiunea forțelor exterioare

### 14.3.2. Aplicație

Pentru structura din figura 14.16.a se cere să se traseze diagrama de moment încovoietor printr-un calcul de ordinul II, prin metoda deplasărilor. Se cunosc:  $P = 140 \text{ kN}$ ,  $Q = 1 \text{ kN}$  și  $EI = 5000 \text{ kNm}^2$ .

Se vor parcurge etapele de calcul prezentate în subcapitolul 14.3.1, astfel:

- a) Determinarea eforturilor axiale de ordinul I din barele structurii.  
Eforturile axiale sunt:

$$N_{13} = P,$$

și

$$N_{12} = 0.$$

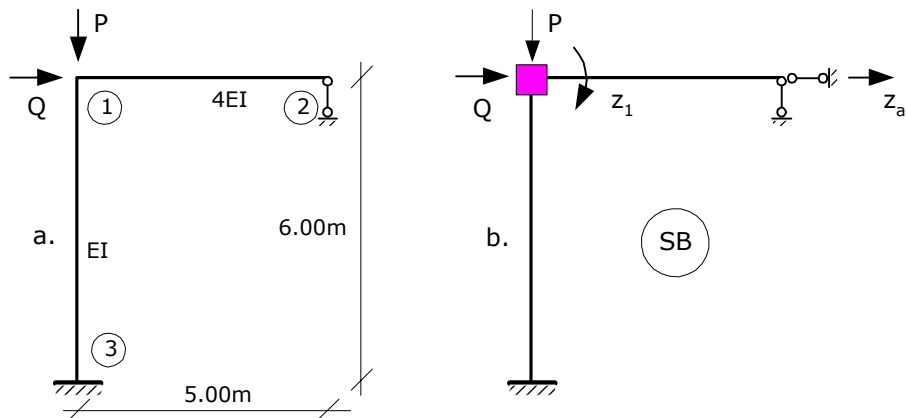


Fig. 14. 16. Cadru static nedeterminat. Calcul de stabilitate.  
a. Structura considerată. b. Sistemul de bază

b) Calculul factorului de compresiune,  $v_{13}$ .

Folosind relația (11.5), se obține pentru factorul de compresiune valoarea:

$$v_{13} = l_{13} \sqrt{\frac{N_{13}}{EI_{13}}}$$

sau

$$v_{13} = 6.0 \sqrt{\frac{140}{5000}} = 1.003 \approx 1.0. \quad (14.32)$$

c) Se stabilește sistemul de bază, corespunzător metodei deplasărilor, figura 14.16.b și se scrie sistemul de ecuații de condiție:

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{1a}Z_a + R_{ip} = 0 \\ r_{a1}Z_1 + r_{aa}Z_a + R_{ap} = 0 \end{cases} \quad (14.33)$$

d) Determinarea coeficienții matricei de rigiditate:  $r_{11}$ ,  $r_{a1}$ ,  $r_{1a}$  și  $r_{aa}$ .

Deformatele sistemului de bază pentru cedări în blocajul de nod  $i$ , respectiv blocajul grad de libertate  $a$  sunt prezentate în figurile 14.17.a și 14.18.a, iar deplasatele în gradul de libertate  $a$  încărcate cu forțele din deformatel sistemului de bază sunt arătate în figura 14. 17.b, respectiv figura 14.18.b.

Pentru calculul coeficienților se scriu următoarele ecuații de echilibru static, conform fig. 14.17:

$$\sum_1 M = 0; \quad r_{11} - K_{12} - K_{13} = 0;$$

$$L_{MV} = 0; \quad r_{a1} \cdot 1 + (K_{13} + t_{13}K_{13}) \cdot \Psi_{13}^a = 0.$$

Rezolvând cele două ecuații se obțin relațiile de calcul ale coeficienților:

$$r_{11} = K_{12} - K_{13} \quad (14.34)$$

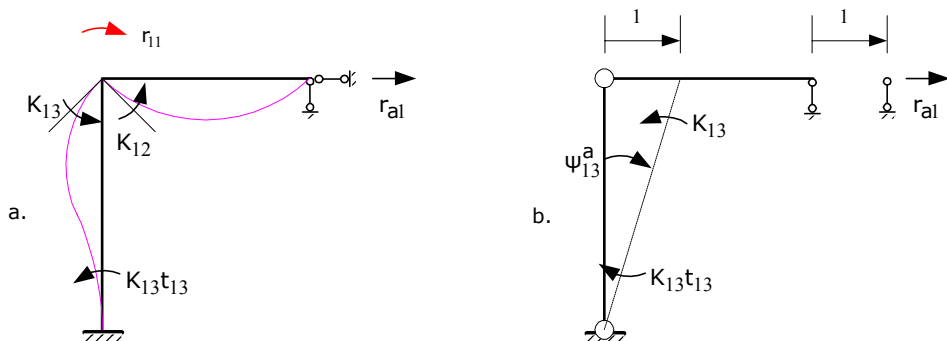


Fig.14.17. Cadru cu noduri deplasabile. Calculul coeficienților  $r_{a1}$  și  $r_{11}$  :  
a. deformata sistemului de bază, b. deplasata sistemului în gradul de libertate "a"

și

$$r_{a1} = -(K_{13} + t_{13}K_{13}) \cdot \Psi_{13}^a. \quad (14.35)$$

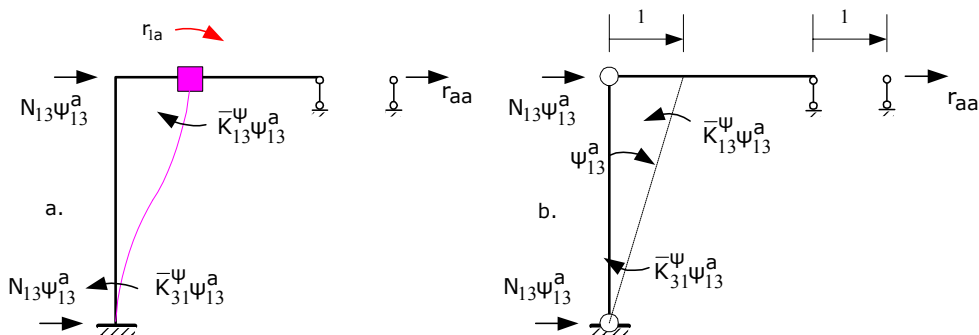


Fig. 14. 18. Cadru cu noduri deplasabile. Calculul coeficienților  $r_{a1}$  și  $r_{aa}$  :  
a. deformata sistemului de bază, b. deplasata sistemului în gradul de libertate "a"

Conform figurii 14.17, pentru calculul coeficienților  $r_{1a}$  și  $r_{aa}$ , se scriu următoarele ecuații de echilibru static:

$$\sum_1 M = 0 ,$$

rezultă:

$$r_{1a} + \bar{K}_{13}^{\Psi} \Psi_{13}^a = 0 \quad (14.36)$$

$$L_a MV_a = 0$$

și

$$r_{aa} \cdot 1 - (\bar{K}_{13}^{\Psi} \Psi_{13}^a + \bar{K}_{31}^{\Psi} \Psi_{13}^a) \cdot \Psi_{13}^a + N_{13} \Psi_{13}^a \cdot 1 = 0 . \quad (14.37)$$

Rezolvând ecuațiile de echilibru se obțin relațiile de calcul ale celor doi coeficienți:

$$r_{1a} = -\bar{K}_{13}^{\Psi} \Psi_{13}^a , \quad (14.38)$$

$$r_{aa} = (\bar{K}_{13}^{\Psi} \Psi_{13}^a + \bar{K}_{31}^{\Psi} \Psi_{13}^a) \cdot \Psi_{13}^a - N_{13} \Psi_{13}^a . \quad (14.39)$$

Conform datelor problemei și a celor patru figuri se cunosc:

$$K_{13} \frac{4EI}{l} K' = \frac{4EI}{6} K'$$

$$K_{12} \frac{3EI}{l} = \frac{3 \cdot 4EI}{5} K = \frac{12EI}{5}$$

$$t_{13} = 0.5 \cdot \frac{K''}{K''}$$

$$\bar{K}_{13}^{\Psi} = \frac{6EI}{l} K = \frac{6EI}{6} K = EI \cdot K$$

$$\Psi_{13}^a = \frac{1}{l} = \frac{1}{6}$$

$$N_{13} = 140 \text{KN}$$

și

$$K' = \frac{3a}{4a^2 - 3\beta^2} = 0.96622$$

$$K = \frac{1}{2a - \beta^2} = 0.9832$$

$$K' = \frac{3\varphi}{4a^2 - 3\beta^2} = 1.017197 .$$



Rezultă:

$$r_{11} = 15220.73558 \quad (14.40)$$

$$r_{a1} = r_{1a} = -819.3441 \quad (14.41)$$

$$r_{aa} = 249.78137 \quad (14.42)$$

e) Calculul termenii liberi:  $R_{1p}$  și  $R_{ap}$ .

În vederea determinării termenilor liberi se încarcă sistemul de bază cu forțele exterioare, figura 14.19.a și se exprimă echilibrul static, prin intermediul următoarelor două ecuații:

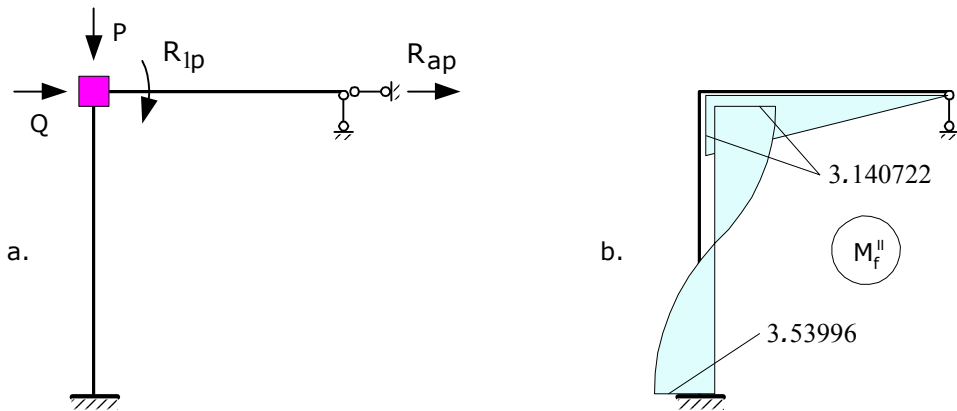


Fig. 14. 19. Cadru static nedeterminat: a. sistem de bază acționat de forțe exterioare; b. diagramă finală de moment încovoietor de ordinal II

$$\sum_1 M = 0;$$

rezultă:

$$R_{1p} = 0 \quad (14.43)$$

și

$$\sum Y = 0;$$

se obține:

$$Q + R_{ap} = 0$$

și

$$R_{ap} = -1. \quad (14.44)$$

f) Rezolvarea sistemului de ecuații de condiție.

Introducând în sistemul de ecuații (14.33), relațiile de calcul a coeficienților (14.40-42) și termenii liberi, expresiile (14.4 și 14.44) și în urma rezolvării acestuia se obțin soluțiile:

$$Z_1 = 0.000261727, \quad (14.45)$$

$$Z_1 = 0.004862029. \quad (14.46)$$

g) Trasarea diagramei de eforturi.

Diagrama finală de moment încovoietor de ordinul II se trasează, prin suprapunerea efectelor, în modul următor:

$$M_{12}^f = M_{13}^f = K_{12}Z_1 = 3.140722142 \text{KNm}, \quad (14.47)$$

$$M_{31}^f = -t_{13}K_{13}Z_1 + \bar{K}_{31}^{\Psi}\Psi_{13}^a Z_a = 3.53996 \text{KNm} \quad (14.48)$$

și este trasată în figura 14.19.b.

#### **14.4. Calculul de stabilitate a cadrelor cu noduri deplasabile folosind matricea de rigiditate. Etape de calcul**

În vederea efectuării unui calcul de stabilitate al unui cadru cu noduri deplasabile, se parcurg următoarele etape de calcul:

- Se realizează un calcul de ordinul I pentru a afla eforturile axiale din barele structurii. Se iau în considerare numai eforturile de compresiune;
- Se calculează factorii de compresiune pentru barele structurii, aplicând relația (11.3), care ia forma:

$$v_{ij} = l_{ij} \sqrt{\frac{N_{ij}}{EI_{ij}}}; \quad (14.49)$$

- Se depistează factorul de compresiune maxim și funcție de acest factor se exprimă ceilalți factori de compresiune. Dacă notăm factorul de compresiune maxim cu "v" sau " $v_{\max}$ ", atunci ceilalți factori de compresiune se determină funcție de acesta astfel:

$$v_{ij} = v \frac{l_{ij}}{l} \sqrt{\frac{N_{ij}}{N} \frac{EI}{EI_{ij}}}, \quad (14.50)$$

unde v se determină cu relația (11.3).

- Se fixează sistemul de bază, corespunzător metodei deplasărilor.
- Se calculează coeficienții  $r_{ii}$ ,  $r_{ji}$ ,  $r_{ib}$ ,  $r_{bb}$ ,  $r_{ab}$  și  $r_{bi}$  aplicând relațiile (13.6), (13.7), (14.25), (14.26), (14.28) și (14.30);

- f) Se determină ecuația de stabilitate prin anularea determinantului matricei coeficienților (matricei de rigiditate):

$$\det([r_{ij}]) = 0; \quad (15.51)$$

- g) Se caută, prin încercări, soluția ecuației de stabilitate.

Obs.: În iterația pentru aflarea soluției ecuației de stabilitate se parcurg câțiva pași, după cum urmează:

1. Se impune o soluție pentru factorul de compresiune maxim,  $v$ , după criteriile prezentate în cursul nr.11, paragraful 11.2, în cadrul observațiilor (punctele 1, 2 și 3). Funcție de aceasta se determină ceilalți factori de compresiune.
2. Se calculează parametrii  $K'$ ,  $K^0$ ,  $K''$ ,  $K$  cu relațiile:

$$k' = \frac{3a}{4a^2 - \beta^2}, \quad (14.52)$$

$$k^0 = \frac{1}{a}, \quad (14.53)$$

$$k'' = \frac{3\beta}{4a^2 - \beta^2}, \quad (14.54)$$

$$k' = \frac{1}{2a - \beta}, \quad (14.55)$$

parametrii  $a$  și  $\beta$  se calculează în funcție de factorul de compresiune cu relațiile (9.50 și (9.53)

3. Se determină rigiditățile la rotire și se introduc, spre verificare, în ecuația de stabilitate.

Următorii pași în iterație coincid cu operațiunile expuse la studiul stabilității cadrelor prin metoda matricei de flexibilitate, cursul numărul 11, paragraful 11.2, punctele 4, 5 și 6 din observații.

## **BIBLIOGRAFIE** **B**

1. Bănuț, V., Calculul neliniar al structurilor, Editura Tehnică, București, 1981.
2. Bănuț, V., Popescu, H., Stabilitatea structurilor elastice, Editura Academiei R.S.R., București, 1975.
3. Bălan, Șt., Mihăilescu, N. Șt., Istoria științei și tehnicii în România. Date cronologice., Editura Academiei R.S.R., București, 1985.
4. Bălan, Șt., ș.a., Dicționar cronologic al științei și tehnicii universale, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1979.
5. Bârsan, G.M., Dinamica și stabilitatea construcțiilor, EDP, București, 1979.
6. Bigs, J.M., Introduction to Structural Dynamics, McGraw-Hill Books Company, New York, 1964.

7. Bratu, Polidor, *Vibrațiile sistemelor elastice*, Editura Tehnică, București, 2000.
8. Buzdugan, Gh., Fetcu, L., Radeș, M., *Vibrații mecanice*, EDP, București, 1979.
9. Buzdugan, Gh., Mihăilescu El., Radeș, M., *Măsurarea vibrațiilor*, Editura Academiei R.S.R., București, 1979.
10. Buzdugan, Gh., *Izolarea antivibratilă a mașinilor*, Editura Academiei R.S.R., București, 1980.
11. Buzdugan, Gh., *Dinamica fundațiilor de mașini*, Editura Academiei R.S.R., București, 1968. Silaș, Gh. ș.a., *Culegere de probleme de vibrații mecanice*, vol. I, *Sisteme liniare cu un număr finit de grade de libertate*, Editura Tehnică, București, 1967.
12. Bratu, P.P., *Izolarea și amortizarea vibrațiilor la utilaje de construcții*, INCERC București, 1982.
13. Caracostea, A., ș.a., *Manual pentru calculul construcțiilor*, Vol.I, *Bazele teoretice de calcul al construcțiilor*, Editura Tehnică, București, 1977.
14. Chiriacescu, Sergiu T., *Dinamica mașinilor unelte. Prolegomene*, Editura Tehnică, București, 2004.
15. \*\*\* *Culegere de probleme de mecanică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1974.
16. *Dicționar de mecanică*, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1980.
17. Darabont, Al., Iorga, I., Văiteanu, D., Simanschevici, H., *Șocuri vibrații. Aplicații în tehnică*, Editura Tehnică, București, 1988.
18. Darabont, Al., Iorga, I., Cihodaru, M., *Măsurarea zgomotului și vibrațiilor în tehnică*, Editura Tehnică, București, 1983.
19. Filimon, I., Soare, M., *Ecuatii diferențiale cu aplicații în mecanica construcțiilor*, Editura Tehnică, București, 1983.
20. Gheorghiu, Al., *Statica construcțiilor*, Vol.III, *Formulări și metode matriceale în statica liniară. Comportarea și calculul nelinier al structurilor*, Editura Tehnică, București, 1980.
21. Gioncu, V., Ivan, M., *Bazele calculului structurilor la stabilitate*, Editura Facla, Timișoara, 1983.
22. Hangan, S., Crainic, L., *Concepte și metode energetice în dinamica construcțiilor*, Editura Academiei R.S.R., București, 1980.
23. Harris, C., Crede, Ch., *Șocuri și Vibrații*, vol. I, II și III, Editura Tehnică, București, 1968.
24. Ifrim, M., *Dinamica structurilor și inginerie seismică*, EDP, București, 1984.
25. Ifrim, M., *Aplicații în Analiza Dinamică a Structurilor și Inginerie Seismică*, EDP, București, 1974.
26. Ilie, Gh., Fierbințeanu, V., Stănilă, N., Petrescu, I., *Mecanica construcțiilor*, Editura Tehnică, București, 1987.

27. Ispas, C., Simion, F.-P., *Vibrațiile mașinilor – unelte. Teorie și aplicații*, Editura Academiei R.S.R., București, 1986.
28. Ixaru, L. Gr., *Metode numerice pentru ecuații diferențiale cu aplicații*, Editura Academiei R.S.R., București, 1979.
29. Marinov., R., *Probleme de stabilitate dinamică în construcții*, EDP, București, 1985.
30. Massonnet, Ch., ș.a., *Calculul structurilor la calculatoare electronice*, Editura Tehnică, București, 1974.
31. Mihiu, C., *Metode numerice în algebra liniară*, Editura Tehnică, București, 1977.
32. Mihiu, C., *Sisteme de ecuații liniare și forme pătratice*, Editura Tehnică, București, 1985.
33. Munteanu, M., *Introducere în dinamica mașinilor vibratoare*, Editura Academiei R.S.R., București, 1986.
34. Nowacki, W., *Dinamica sistemelor elastice*, Editura Tehnică, 1969.
35. Olariu, V., Sima, P., Achiriloaie, V., *Mecanică tehnică*, Editura Tehnică, București, 1982.
36. Oprea, Gh., *Stabilitatea și calculul de ordinal II al structurilor din bare*, Editura Național, 1999.
37. Pană, T., *Absorbitori dinamici de vibrații*, Editura Tehnică, București, 1984.
38. Posea, N., *Calculul dinamic al structurilor*, Editura Tehnică, București, 1991.
39. Radeș, M., *Metode dinamice pentru identificarea sistemelor mecanice*, Editura Academiei R.S.R., București, 1979.
40. Rădoi, M., Deciu, E., Voiculescu, D., *Elemente de vibrații mecanice*, EDP, București, 1973., *Statica Construcțiilor*, EDP, București, 1972.
41. Răutu, S., Băbuț, V
42. Salvadori, M.G., Baron, M.L., *Metode numerice în tehnică*, Editura Tehnică, București, 1972.
43. Sandi, H., *Elemente de dinamica structurilor*, EDP, București, 1983.
44. Scarlat, A., *Stabilitatea și calculul de ordinul II al structurilor*, Editura Tehnică, București, 1969.
45. Scarlat, A., *Stabilitatea structurilor. Probleme speciale*, Editura Tehnică, București, 1969.
46. Silaș, Gh. ș.a., *Culegere de probleme de vibrații mecanice*, vol. II, *Sisteme neliniare și parametrice. Sisteme vibropercutante. Aplicații tehnice*, Editura Tehnică, București, 1973.
47. Silaș, Gh., *Mecanică. Vibrații mecanice*, EDP, București, 1968.
48. Silaș, Gh., Brîndeu, L., *Sisteme vibropercutante*, Editura Tehnică, 1986.
49. Simionescu, I., Dragnea, M., Moise, V., *Metode numerice în tehnică*, Editura Tehnică. *Aplicații în FORTRAN*, EDITURA TEHNICĂ, 1995.
50. Simonici, M., *Dinamica construcțiilor*, Editura Tehnică, București, 1958.

51. Soare, M., Teodorescu, P.P., Toma, I., Ecuații diferențiale cu aplicații în Mecanica Construcțiilor, Editura Tehnică, București, 1999.
52. Snitko, N.K., Dinamica construcțiilor, Editura Tehnică, București, 1965.
53. Staicu, Șt., Introducere în mecanica teoretică, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1983.
54. STAS 3451 - 73, Statica, dinamica și stabilitatea structurilor. Terminologie.
55. STAS 6488 - 73, Solicitări variabile periodice. Terminologie și simboluri.
56. STAS 10101/0 - 75. Acțiuni în construcție. Clasificarea și gruparea acțiunilor.
57. STAS 101001/OB - 77, Clasificarea și gruparea acțiunilor pentru poduri de cale ferată și șosea.
58. STAS 10101/1 - 75, Acțiuni în construcție. Greutăți tehnice și încărcări permanente.
59. STAS 1489 - 75, Poduri de cale ferată. Acțiuni.
60. STAS 1545 - 63, Poduri pentru străzi și șosele. Pasarele. Sarcini.
61. STAS 3220 - 65, Sarcini în construcții. Poduri de cale ferată. Convoaie tip.
62. STAS 3221 - 63, Poduri pentru străzi și șosele. Convoaie tip și clase de încărcare.
63. STAS 737/1 - 72, Sistemul Internațional de unități (SI). Unități fundamentale și unități suplimentare.
64. STAS 737/2 - 72, Sistemul Internațional de unități (SI). Unități derivate.
65. STAS 737/3 - 72, Sistemul Internațional de unități (SI). Reguli de formare și scriere a unităților SI.
66. STAS 737/4 - 72, Sistemul Internațional de unități (SI). Prefixe pentru formarea multiplilor și submultiplilor zecimali ai unităților SI.
67. STAS 737/8 - 72, Sistemul Internațional de unități (SI). Mărimi caracteristice mecanicii. Unități de măsură.
68. STAS 9446 - 73, Unități de măsură care nu fac parte din sistemul Internațional de unități (SI). Unități tolerate.
69. Teodorescu, P.P., Dinamica corpurilor liniar elastice, Editura Academiei R.S.R., București, 1972.
70. Jăposu, I., Mecanică analitică și vibrații, Teorie și probleme, Editura Tehnică, București, 1998.
71. Vâlcovici, V., Bălan, Șt., Voinea, R., Mecanică teoretică, Editura Tehnică, București, 1968.